MA-222. UKE 35: ROMGEOMETRI II

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Plan, linjer og vektorer

Sist uke brukte vi systemer av likninger til å definere plan og linjer. Vi snakket også om vektorer og euklidsk avstand i $\mathbb{E}^3$. Denne uken handler det om vektorer og hvordan de forholder seg til våre geometriske venner: planene og linjene.

1.1. **Linjen gitt av et punkt og en vektor.** La P være et punkt med koordinater (x_0, y_0, z_0) og $\mathbf{u} = [a\ b\ c]^T \in \mathbb{R}^3$ være en vektor med positiv lengde. Da vil punktet $Q = P + \mathbf{u}$ være forskjellig fra P, og vi sier at linjen som inneholder P og Q har *retning* $\mathbf{u}$. Merk at det kun finnes én slik linje, og at vi får den samme linjen dersom vi velger punktet Q som endepunktet til vektoren $\mathbf{OP} + r \cdot \mathbf{u}$ for alle skalarer $r \neq 0$. Vi lærte i **ma-179** at alle punktene på linjen (snittet mellom to plan) kan skrives på parametrisk vektorrform

$$Q = P + t \cdot \mathbf{u} = (x_0 + t \cdot a, y_0 + t \cdot b, z_0 + t \cdot c)$$

der $t \in \mathbb{R}$ er en fri variabel.

1.2. **Normal til et plan** [1, §10.4]**.** Dersom W er et plan og $P \in W$, kaller vi en vektor $\mathbf{n}$ for *normal* til W dersom linjen gjennom P med retning $\mathbf{n}$ er vinkelrett til alle linjer $L \in W$.

La W være planet gitt ved likningen

$$ax + by + cz = d\,.$$

Da påstår vi at vektoren $\mathbf{n} = [a\ b\ c]^T$ er normal til W. Vi ser dette ved å velge et vilkårlig punkt $P = (x_0, y_0, z_0) \in W$, og se på vektoren mellom P og et annet vilkårlig punkt

Date: 31. august 2023.

$Q = (x, y, z) \in W$. Da vil

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = d - d = 0\,,$$

som betyr at linjen gjennom P med retning $\mathbf{n}$ står vinkelrett på alle linjene som ligger i W.

Omvendt kan vi definere et plan dersom vi starter med en normalvektor $\mathbf{n} = [x\ y\ z]^T$ og et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$. La W være alle punkter i rommet som oppfyller likningen

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Dersom vi skriver ut denne likningen ved å bruke definisjonen av skalarproduktet, får vi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

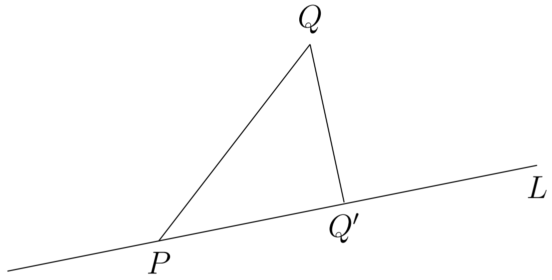
og ved å flytte konstantene over på høyre side av liknignen, får vi

$$ax + by + cz = d$$

der $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Det er klart at dette planet har normalvektor $[a\ b\ c]^T$ og inneholder punktet (x_0, y_0, z_0), som ønsket.

1.3. **Projeksjon på en linje.** La L være linjen gjennom P med retning $\mathbf{v}$, og la Q være vilkårlig punkt i rommet.

La $Q' \in L$ være et punkt på linjen slik at linjestykket QQ' står vinkelrett på L. Dersom $P \in L$ er et punkt på linjen, er trekanten $\Delta PQ'Q$ en rettvinklet trekant:



Pytagoras' setning sier at

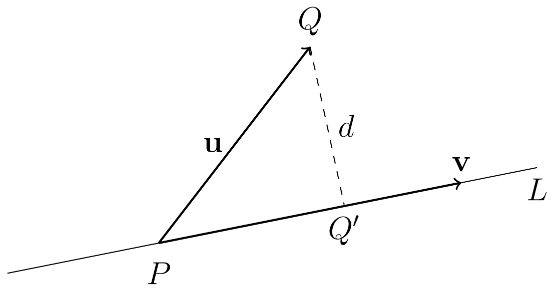
$$||QQ'|| = \sqrt{||PQ||^2 - ||PQ'||^2}$$

som betyr at

$$||QQ'|| \leq ||PQ||$$

(altså: et katet i en rettvinklet trekant er kortere enn hypotenusen.) Med andre ord er $Q' \in L$ det punktet på linjen som ligger nærmest punktet Q. Det finnes bare ett slikt punkt, og vi kaller det Q' *projeksjonen* av Q ned på linjen L.

Vi ønsker nå å finne punket Q' ved regning. For å gjøre dette, velger vi først et vilkårlig punkt P på linjen. Vi lar $\mathbf{u}$ være vektoren fra P til Q som i tegningen under



Siden trekanten er rettvinklet, har vi at

$$l = ||PQ'|| = ||u|| \cdot \cos(\angle(QPQ')) \, .$$

Siden skalarproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\angle(QPQ')) \cdot ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$, så er denne lengden lik

$$l = ||PQ'|| = \frac{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos(\angle(QPQ'))}{||\mathbf{v}||} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

Dette er lengden av vektoren vi får når vi projisererer $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$, og vi kaller denne lengden for *skalarprojeksjonen av* $\mathbf{u}$ *ned på* $\mathbf{v}$.

Vi ønsker nå å finne punktet Q' og måten vi skal gjøre det på er å først finne vektoren $\mathbf{PQ'}$ (se tegningen over). Vi vet at denne vektoren starter i punktet P og ender i Q', og siden begge er punkter på linjen L, så er $\mathbf{PQ'}$ parallell med $\mathbf{v}$. Med andre ord: vektoren vi søker har samme retning som $\mathbf{v}$, men lengden er lik l (fra utregningen over), og må korrigeres:

$$\mathbf{PQ'} = \frac{l}{||\mathbf{u}||} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2} \cdot \mathbf{v} \, .$$

Vektoren $\mathbf{PQ'}$ kalles *vektorprojeksjonen av* $\mathbf{u}$ *ned på* $\mathbf{v}$.

Eksempel 1.1 ((...))

1.4. **Projeksjon på et plan** [1, §10.4, eksempel 7]**.** La $P \in W$ være et punkt i et plan med normalvektor $\mathbf{n}$, og la Q være et vilkårlig punkt i rommet. Dersom vi ønsker å finne punktet $Q' \in W$ som har minst avstand til P, kan vi først prosjisere $\mathbf{QP}$ ned på plannormalen $\mathbf{n}$, og deretter flytte P med denne vektoren. Altså, vi danner punktet

$$Q' = Q - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{PQ}}{||\mathbf{n}||^2} \cdot \mathbf{n}$$

(Her har vi brukt identiteten $\mathbf{QP} = -\mathbf{PQ}$.) Det er lett å sjekke at $\mathbf{n} \cdot \mathbf{PQ'} = 0$, som betyr at $Q' \in W$ som vi ønsket. I tillegg er vektoren $\mathbf{Q'Q} \perp W$, så lengden av denne vektoren er den korteste avstanden mellom ethvert punkt i planet og P. Derfor er Q' projeksjonen av Q på W.

Avstanden fra Q til planet er derfor

$$d = ||QQ'|| = ||\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{PQ}}{||\mathbf{n}||^2} \cdot \mathbf{n}|| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{PQ}}{||\mathbf{n}||^2} \right| \cdot ||\mathbf{n}|| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{PQ}|}{||\mathbf{n}||}$$

Eksempel 1.2 ((...))

1.5. **Vinkel mellom to plan.** Vi definerer vinkelen mellom to plan som vinkelen mellom normalvektorene for de to planene.

Eksempel 1.3 La W og V være plan gitt ved

$$2x - y + z = 0 \text{ og } -x + z = 0\,.$$

Vektorene $\mathbf{u} = [2\ -1\ 1]^T$ og $\mathbf{v} = [-1\ 0\ 1]^T$ er normalvektorer for de to planene, og vi har

$$\cos(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||} = \frac{-2+1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{12}}$$

Kalulator gir tilnærmingen

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{12}}) \approx 106(grader)$$

2. Kryssprodukt [1, §10.3]

Det er vanlig å gi navn til enhetsvektorene langs de tre romaksene som følger

$$\mathbf{i} = [1\ 0\ 0]^T$$
$$\mathbf{j} = [0\ 1\ 0]^T$$
$$\mathbf{k} = [0\ 0\ 1]^T$$

Kryssproduktet er en operasjon som lager en ny vektor ut av to andre vektorer. Algebraisk defineres det som

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{bmatrix},$$

og [1, §10.3, Teorem 2] gir en geometrisk formulering:

(1) $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||\cdot|\sin(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))|$
(2) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp W$ der W er planet gjennom origo som inneholder $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
(3) Vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ utgjør et *høyrehåndssystem*.

Med andre ord: Kryssproduktet mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er en vektor som har

- Lengde gitt ved 1)
- Retning parallell med normalen til planet vektorene utspenner, punkt 2)
- Punkt 3) er siste bit med informasjon som skal til for å bestemme kryssproduktet entydig. Grunnen er at dersom vektoren $\mathbf{z}$ oppfyller 1) og 2) så gjør vektoren $-\mathbf{z}$ det også. Punkt 3) forteller oss om skal velge $\mathbf{z}$ eller $-\mathbf{z}$: Vi skal velge den som gir oss et høyrehåndsystem hvis vi tegner opp de tre vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ i et høyrehånds aksesystem.

Legg merke til at dersom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært avhengige, finnes det uendelig mange plan W som inneholder de to vektorene, så punkt 2) gir ikke mening. Men i dette tilfellet er $\sin(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})) = 0$ så kryssproduktet er lik $\mathbf{0}$ og vi trenger ikke W til å bestemme kryssproduktet.

Kryssproduktet oppfyller en rekke regneregler, se [1, s. 587], men vi må være oppmerksom på at det ikke er like veloppdragent som skalarproduktet. Blant annet er det *antikommutativt*:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$$

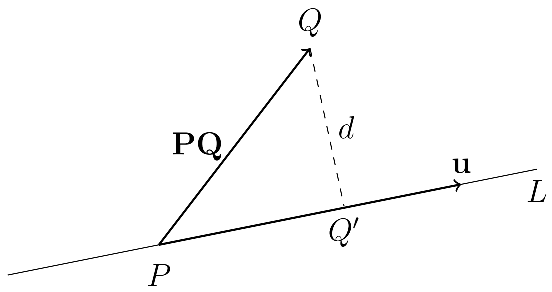
og det er ikke *assosiativt*, det vil si at det finnes vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ slik at

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}\,.$$

2.1. **Avstand fra punkt til en linje** [1, §10.4, eksempel 8]**.** La L være linjen med retning $\mathbf{u}$ og som inneholder punktet P. Dersom Q er et vilkårlig punkt i rommet, er avstanden fra Q til L gitt ved

$$d = ||\mathbf{PQ}|| \cdot |\sin(\angle(\mathbf{PQ}, \mathbf{u}))|\,.$$

Dersom vi multipliserer begge sider av denne likningen med $||\mathbf{u}||$ blir høyresiden lik



$||\mathbf{PQ} \times \mathbf{u}||$, så vi får

$$d = \frac{||\mathbf{PQ} \times \mathbf{u}||}{||\mathbf{u}||}$$

((Sjekk at dette gir avstand 0 når $Q \in L$.))

2.2. **Avstanden mellom to linjer** [1, §10.4, eksempel 9]**.** La L_1 og L_2 være to punkter som inneholder henholdsvis punktene P_1 og P_2 og har retninger $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$.

La $Q_1 \in L_1$ og $Q_2 \in L_2$ være to punkter på linjene. Avstanden mellom dem er minst når vektoren $\mathbf{Q_1Q_2}$ er vinkelrett på både $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$. Med andre ord når $\mathbf{Q_1Q_2}$ er lik sin egen projeksjon ned på vektoren $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Derfor er avstanden mellom linjene lik

$$d = \frac{|(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{P_1P_2}|}{||\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2||}$$

2.3. **Planet gitt ved tre punkter.** Anta at P, Q og R er tre punkter i rommet. Vi vil finne et plan som inneholder alle disse. La $\mathbf{u} = \mathbf{PQ}$ og $\mathbf{v} = \mathbf{PR}$, og la $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Da er per definisjon $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, så dersom $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, vil planet med normalvektor $\mathbf{n}$ og som inneholder P være løsning på problemet.

Kravet om at $\mathbf{n}$ ikke er nullvektoren er ekvivalent med at vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige. Vi sier da at punktene P, Q og R ikke er *kolineære*, altså at de ikke ligger på samme linje i rommet.

Eksempel 2.1 Gitt punktene $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ og $C = (0, 0, 1)$. Planet som inneholder disse tre punktene kan vi finne på to forskjellige måter.

Først kan vi bruke formelen for et plan $ax + by + cy = d$ og sette inn koordinatene for A, B, C for å finne konstantene a, b, c, d:

- $x = 1, y = 0, z = 0$ gir oss $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d$ som betyr at $a = d$.
- $x = 0, y = 1, z = 0$ gir oss $a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = d$ som betyr at $b = d$.
- $x = 0, y = 0, z = 1$ gir oss $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = d$ som betyr at $c = d$.

Altså er $a = b = c = d$, så likningen for dette planet er

$$ax + ay + az = a$$

eller

$$x + y + z = 1$$

siden $a \neq 0$. Dette er altså planet med normalvektor $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ og som inneholder punktet $(0, 0, 1)$.

Så kan bruke kryssprodukt til å finne normalen til planet først og likningen etterpå: Vi vet at vektoren $\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ er normal til planet (se punkt 2) i listen over). Vi regner ut:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1, 0, 1\end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{i} \cdot 1 - \mathbf{j} \cdot (-1) + \mathbf{k} \cdot 1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Igjen får vi at planet vi leter etter er planet som inneholder punktet $A = (1, 0, 0)$ og som har normalvektor $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$. Likningen for planet er derfor gitt ved

$$0 = \mathbf{n} \cdot \begin{bmatrix}x-1\\y-0\\z-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x-1\\y\\z\end{bmatrix} = x - 1 + y + z$$

altså

$$0 = x + y + z - 1$$

eller

$$1 = x + y + z\,.$$

Referanser

[1] Robert Adams and Christopher Essex, *Calculus*: *A complete course*, 10th ed., Addison Wesley, 2021.

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: sverreal@uia.no
URL: https://home.uia.no/sverreal