MA-222. UKE 36: DOBLE INTEGRALER

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Innledning

Vi dekker kapittel 15.1-2 i [1] (14.1-2 i utgave 9!) hvor vi skal snakke om doble integraler. Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

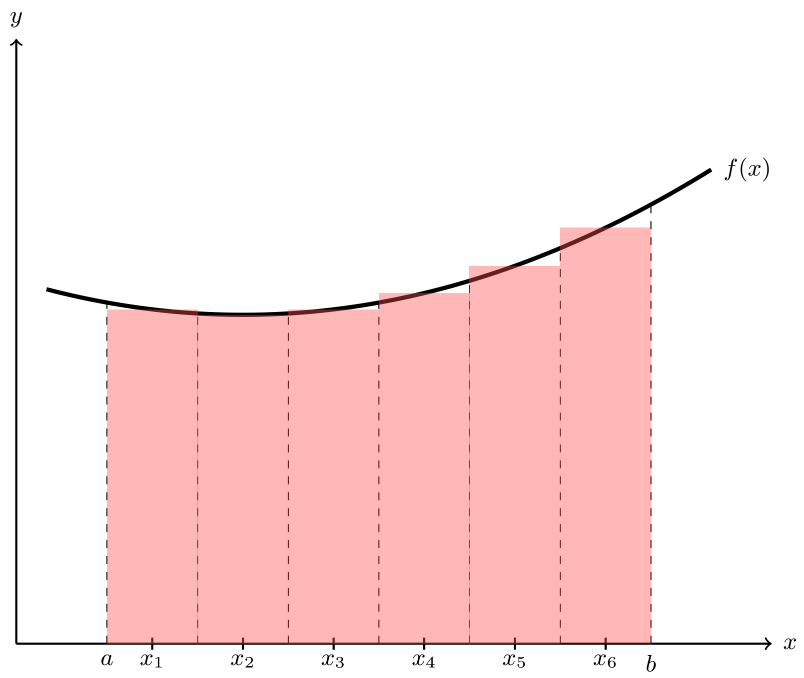
2. Definisjoner

La $f(x)$ være en funksjon av én variabel, definert på intervallet $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Vi husker fra kurset MA-178 at vi definerte det bestemte integralet av $f(x)$ over $[a, b]$ som grenseverdien

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x \,. \tag{1}$$

Der $\Delta x = (b-a)/N$ of $x_i = a + (i - 0.5)\Delta x$. Med andre ord: for hvert naturlig tall $N > 0$ deler vi opp intervallet $[a, b]$ i N like store delintervaller og lar x_i være midtpunktet i intervall i. Når vi lar N vokse, blir intervallbredden Δx mindre samtidig som vi får flere ledd i summen. Grenseverdien, hvis den eksisterer, kaller vi *det bestemte integralet av $f(x)$ over intervallet* $[a, b]$. Figuren under illustrerer en delsum i grensen over når $N = 6$.

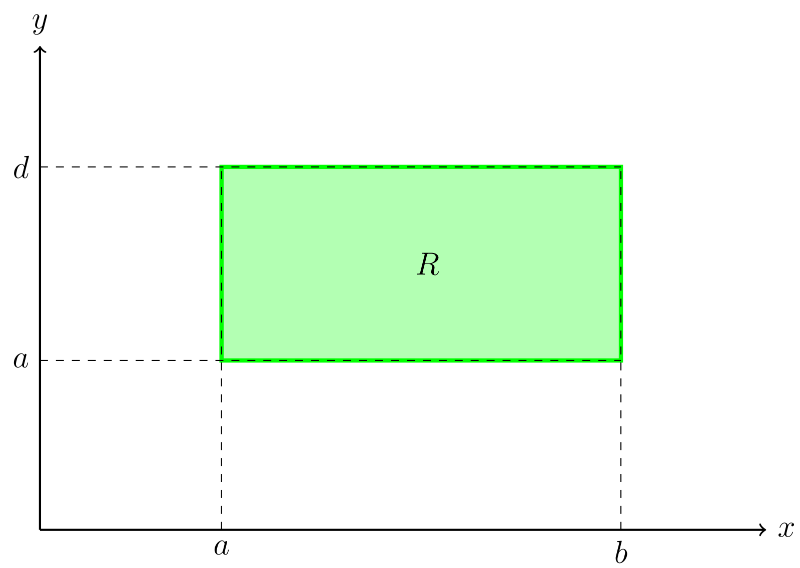
Date: 16. november 2023.



Vi ønsker å utvide denne definisjonen til å gjelde funksjoner av to variable. La $f(x, y)$ være en slik funksjon, og anta at definisjonsmengden til f er gitt ved ulikhetene

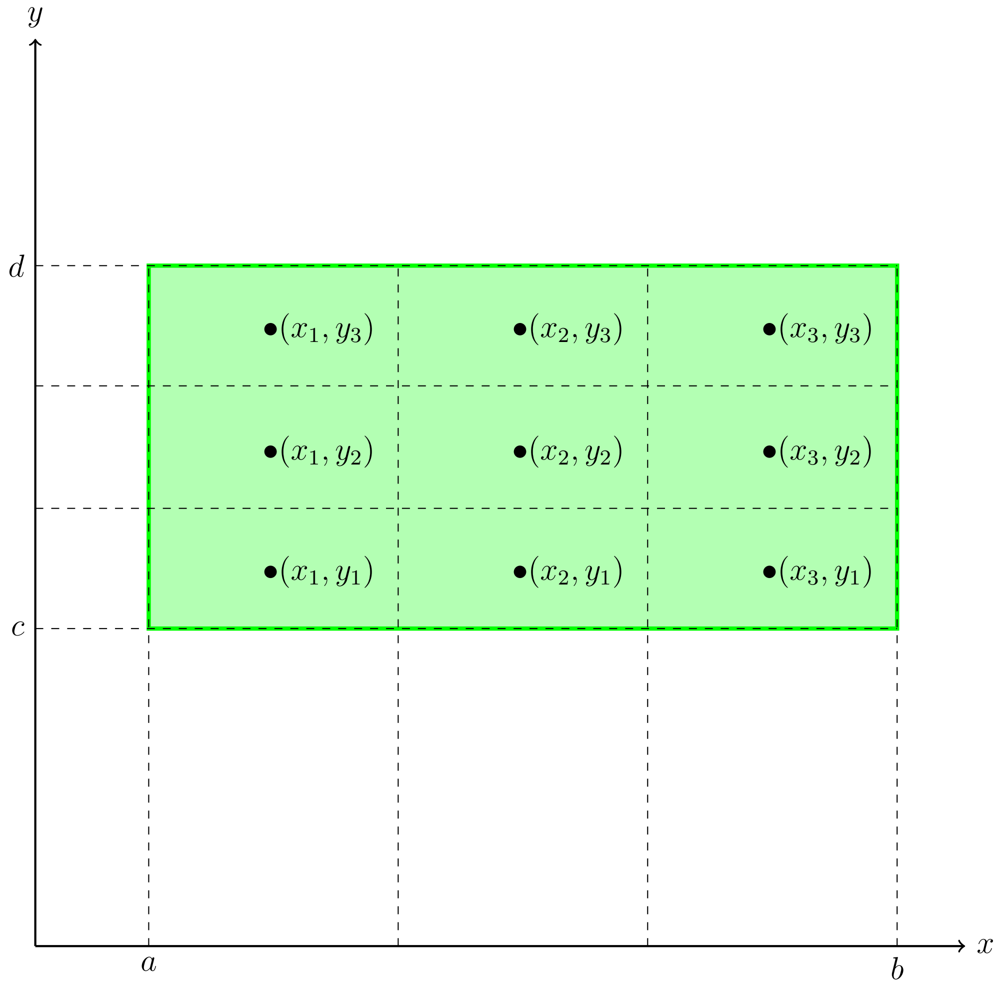
$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d\,.$$

Med andre ord er definisjonsmengden til $f(x, y)$ lik et rektangel R i XY-planet.



Nå går vi frem akkurat på samme måte som da vi gjorde med én variabel: For hvert naturlig tall N, deler vi intervallene $[a, b]$ og $[c, d]$ inn i N like store delintervaller:

$$\Delta x = (b - a)/M \text{ og } x_i = a + (i - 0.5) \cdot \Delta x$$
$$\Delta y = (d - c)/N \text{ og } y_j = c + (j - 0.5) \cdot \Delta y$$



Hvert delrektangel i oppdelingen av R får derfor areal $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$, og vi definerer nå det doble bestemte integralet av $f(x, y)$ over rektanglet R til å være grenseverdien

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} f(x_i, y_j) \cdot \Delta A\,. \tag{2}$$

Med andre ord: Hvert par (i, j) bestemmer ett lite delrektangel i R og for dette delrektanglet finner vi verdien av f i midtpunktet (x_i, y_j). Så multipliserer vi med ΔA, og så summerer vi alle disse verdiene for alle delrektanglene.

Når vi lar M og N vokse, blir rektangelarealene $\Delta A = (b - a)(d - c)/MN$ mindre samtidig som vi får flere ledd i summen. Grenseverdien, hvis den eksisterer, kaller vi *det bestemte integralet av $f(x, y)$ over R.*

Advarsel! Det finnes funksjoner $f(x, y)$ som ikke lar seg integrere, dvs. det finnes funksjoner der grensen over ikke eksisterer. Dersom $f(x, y)$ er kontinuerlig på D eksisterer alltid integralet. Man kan integrere funksjoner som ikke er kontinuerlige også, så lenge diskontinuitetene ikke skjer "altfor ofte". Vi skal ikke gå nærmere inn på dette i MA-222, og de fleste av våre funksjoner kommer til å være kontinuerlige.

2.1. **Beregning ved gjentatt antiderivasjon.** Den doble grensen i definisjonen av det doble integralet forteller oss hva integralet skal være, men ikke hvordan vi skal regne det ut i konkrete tilfeller.

Som dere husker hadde vi den samme situasjonen når vi lærte om integrasjon i MA-178: Vi definerte først det bestemte integralet som en grensesum, og så lærte vi at dersom $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så var

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Dette gjorde at vi kan beregne integraler hvis vi kjenner til den antideriverte av integranden. Vi skal bruke dette til å beregne dobbeltintegraler også.

Skriv derfor om grensesystemet i definisjonen av det doble integralet som følger:

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\ dA &= \lim_{M,N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} f(x_i,y_j) \cdot \Delta x \Delta y \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} f(x_i,y_j) \cdot \Delta x \right) \cdot \Delta y \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\int_b^d f(x,y_j)\ dx \right) \cdot \Delta y \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy
\end{aligned}$$

Det som skjer når vi går fra linje 1 til linje 2 i denne utregningen, er at vi tar grensen $M \to \infty$ først, og tar grensen $N \to \infty$ etterpå, i stedet for å la begge verdiene gå mot ∞ på likt. Det gjør at vi kan skrive den innerste summen som et bestemt integral av én variabel x. Dette integralet er en funksjon av y_j som den ytre grensesummen integrerer over intervallet $[c,d]$.

Men vi kunne like godt ha tatt grensene i omvendt rekkefølge, altså latt $N \to \infty$ først, og så $M \to \infty$. I alt har vi derfor to måter å regne ut det doble integralet:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy = \iint_R f(x,y)\ dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx\,.$$

Vi kan altså integrere $f(x,y)$ med hensyn på y først, og så integerere svaret vi får med hensyn på x. Eller vi kan gjøre det i motsatt rekkefølge: integrere med hensyn på x først deretter med hensyn på y.

Eksempel 1 La R være rektanglet som ligger i 1. kvadrant av XY-planet og som har hjørner $(0,0)$ og $(\pi/2, 1)$. Regn ut

(3)
$$I = \iint_R \sin(x) \cdot y\ dA\,.$$

Rektanglet er gitt ved ulikhetene

$$\begin{aligned} 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

Vi kan derfor regne ut integralet ved å integrere med hensyn på variabelen x først:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot y\ dx \right)\ dy$$

Legg merke til integrasjonsgrensene: Det innerste integralet det vi får ved å holde $y = y_0$ fast og integrere $f(x, y_0)$ over den delen av området R som overlapper med horisontale linjen $y = y_0$. Dersom vi tenker oss at vi beveger oss i retning av stigende x-verdier på linjen $y = y_0$, er den nederste integrasjonsgrensen til det innerste integralet lik den x-verdien hvor vi entrer området R. Den øvre grensen er den x-verdien der vi forlater området. Siden R er et rektangel, så er inngangs- og utgangs-verdien uavhengng av y_0, og er i vårt tilfelle alltid 0 og $\pi/2$.

Nå er det på tide å regne ut (3). Det innerste integralet er

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot y \; dx = y \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x) \; dx = y \cdot [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = y \cdot (0 - (-1)) = y\,.$$

Altså er (3)

$$I = \int_0^1 y \; dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}\,.$$

Til slutt regner vi ut I ved å integrere med hensyn på y først, og deretter x:

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \sin(x) \cdot y \; dy \right) \; dx$$

Legg igjen merke til integrasjonsgrensene: Det innerste integralet det vi får ved å holde $x = x_0$ fast og integrere $f(x_0, y)$ over den delen av området R som overlapper med vertikale linjen $x = x_0$. Dersom vi tenker oss at vi beveger oss i retning av stigende y-verdier på linjen $x = x_0$, er den nederste integrasjonsgrensen til det innerste integralet lik den y-verdien hvor vi entrer området R. Den øvre grensen er den y-verdien der vi forlater området. Siden R er et rektangel, så er inngangs- og utgangs-verdien uavhengng av x_0, og er i vårt tilfelle alltid 0 og 1. Derfor blir det innerste integralet denne gangen

$$\int_0^1 \sin(x) \cdot y \; dy = \sin(x) \cdot \int_0^1 y \; dy = \sin(x) \cdot \frac{1}{2}.$$

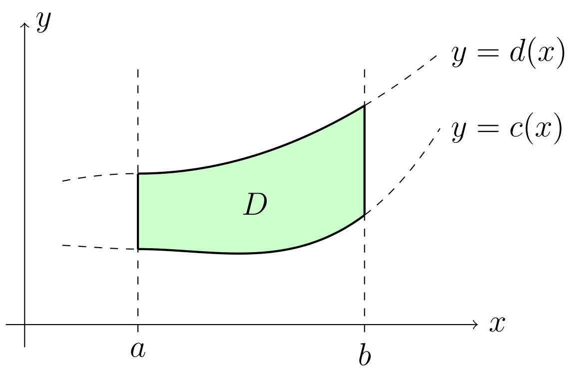
Og til slutt integrerer vi dette resultatet med hensyn på x:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \; dx = \frac{1}{2} \, [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,.$$

2.2. **y-simple integrasjonsområder.** La $c(x)$ og $d(x)$ være kontinuerlige funksjoner definert på intervallet $[a, b]$, slik at $c(x) < d(x)$. Området D kalles y-simpelt dersom det er definert ved ulikhetene

$$a \leq x \leq b$$
$$c(x) \leq y \leq d(x)$$

Forskjellen fra tidligere er at vi nå tillater at grensene på variabelen y kan variere ettersom x endrer seg.



Dersom $f(x, y)$ er en funksjon med definisjonsområde D, kan vi definere dobbeltintegralet over D som:

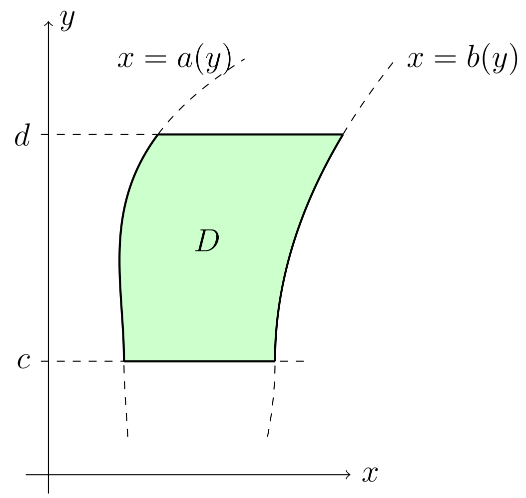
$$\iint_D f(x, y)\ dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\ dy\ dx\,.$$

Legg merke til at dersom $c(x) = c_0$ og $d(x) = d_0$ er konstante funksjoner, så er D et rektangel og dobbeltintegralet over er akkurat av den typen vi har sett på tidligere. Den eneste endringen vi har gjort er å tillate at når vi regner ut det innerste integralet, så kan integrasjonsgrensene for y variere som funksjoner av x.

2.3. **x-simple integrasjonsområder.** La $a(y)$ og $b(y)$ være kontinuerlige funksjoner definert på intervallet $[c, d]$, slik at $a(y) \leq b(y)$. Området D kalles x-simpelt dersom det er definert ved ulikhetene

$$a(y) \leq x \leq b(y)$$
$$c \leq y \leq d$$

Denne gangen tillater vi at grensene på variabelen x kan variere ettersom y endrer seg.



Dersom $f(x, y)$ er en funksjon med definisjonsområde D, kan vi definere dobbeltintegralet over D som:

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\ dx\ dy\,.$$

Legg merke til integrasjonsrekkefølgen: Siden integrasjonsgrensene på x varierer som funksjoner av y, må det innerste integralet være med hensyn på x.

2.4. **Områder som er både y- og x-simple.** Dersom et område D er både x- og y-simpelt på likt, har vi i de foregående avsnittene definert hva vi mener med dobbeltintegralet over D på to måter, nemlig:

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a(y)}^{x=b(y)} f(x, y)\ dx \right)\ dy = \int_{x=a}^{y=b} \left(\int_{y=c(x)}^{y=d(x)} f(x, y)\ dy \right)\ dx$$

Fordelen kan være at det ene dobbeltintegralet kan være enklere å beregne enn det andre, som eksemplet under viser.

Advarsel! De to likhetene i formelen over er strengt tatt kun definisjoner vi gjorde i avsnittene over. Vi har ikke vist matematisk at de to faktisk er like når området D er x- og y-simpelt. En måte å overbevise seg om at vi ikke har motstridende definisjoner, er som følger:

Området D er begrenset i den forstand at det finnes et rektangel R som inneholder D. Vi definerer nå en funksjon g som utvider f til hele R:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{hvis } (x, y) \in D \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Med andre ord lar vi $g(x, y)$ være lik $f(x, y)$ på D, og konstant lik 0 utenfor. Da har vi at

$$\int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a(y)}^{x=b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} g(x, y)\, dx \right) dy \tag{4}$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} g(x, y)\, dy \right) dx \tag{5}$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{x=c(y)}^{x=d(y)} f(x, y)\, dx \right) dy \tag{6}$$

Likhet (4) gjelder fordi selv om vi utvider integrasjonsgrensene til hele R, så er funksjonen g lik 0 alle stedet som ikke er i D. Integralet endrer seg med andre ord ikke når vi legger til en drøss med 0-er.

Likhet (5) bytter integrasjonsrekkefølgen, noe som vi vet er lovlig her siden integrasjonsområdet nå er rektanglet R.

Den siste likheten (6) gjelder av samme grunn som likhet (4).

Eksempel 2 [1, Eksempel 15.2.3 (14.2.3 i utgave 9.)] Beregn integralet

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx\,.$$

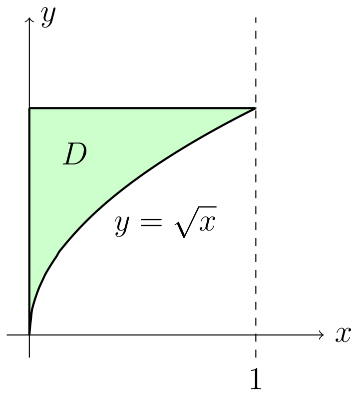
Det innerste integralet får vi dessverre ikke løst analytisk, så da gir vi kanskje opp? Langtifra, det går likevel an å løse denne oppgaven. La D være integrasjonsområdet til integralet I. Det første man bør gjøre er å forstå hvordan D ser ut. Jeg synes det er nyttig å lese dette ut i fra integralet, ytterst til innerst, med ord, slik:

"For hver x (siden den er ytterst) i intervallet $[0, 1]$, så går y (innerst) fra $\sqrt{x}$ til 1"

Integrasjonsgrensene som bestemmer D som et y-simpelt område er da gitt ved ulikhetene

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq & y \leq 1\,. \end{aligned}$$

Det neste steget i denne type oppgave er som regel å forstå hvordan integrasjonsområdet ser ut. Siden uliketene over sier at D er området begrenset at linjene $x = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{x}$ og $y = 1$, finner vi D som området som ligger over grafen til $y = \sqrt{x}$ og samtidig under grafen til $y = 1$, i intervallet $x \in [0, 1]$:



Nå ser vi at området D også er x-simpelt. Hvis $(x, y) \in D$ så er y i intervallet $[0, 1]$, og x oppfyller ulikheten $0 \le x \le y^2$. Altså:

$$\begin{aligned} 0 \le& y \le 1 \\ 0 \le& x \le y^2 \end{aligned}$$

Hvor fikk vi y^2 i fra? Svaret er at den nederste ulikheten angir nedre og øvre verdi for $x \in D$ når vi kun ser på punkter som ligger på den horisontale linjen i høyde y. Så den øvre verdien angir x-koordinaten til et punkt (x, y) på den krumme kurven i tegningen over. Men dette er grafen til funksjonen $y = \sqrt{x}$, som betyr $y^2 = x$.

Med denne beskrivelsen av D som et x-simpelt område kan vi regne ut integralet ved å integrere med hensyn på x først (innerst), og y til slutt (ytterst):

$$I = \iint_D e^{y^3} \, dA = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y^2} e^{y^3} \, dx \right) \, dy$$

Integranden avhenger ikke av x, så det innerste integralet blir

$$\int_0^{y^2} e^{y^3} \, dx = \left[x \cdot e^{y^3} \right]_{x=0}^{x=y^2} = e^{y^3} \cdot \left(y^2 - 0 \right) = y^2 \cdot e^{y^3} .$$

Det siste steget er nå lett å løse ved å bruke kjerneregelen. Dersom vi setter $u = y^3$, får vi $\frac{1}{3} \cdot du = y^2 \cdot dy$, som betyr at

$$I = \int_{y=0}^{y=1} y^2 \cdot e^{y^3} \, dy = \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{3} e^u \, du = \frac{1}{3} \cdot \left[e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{3} .$$

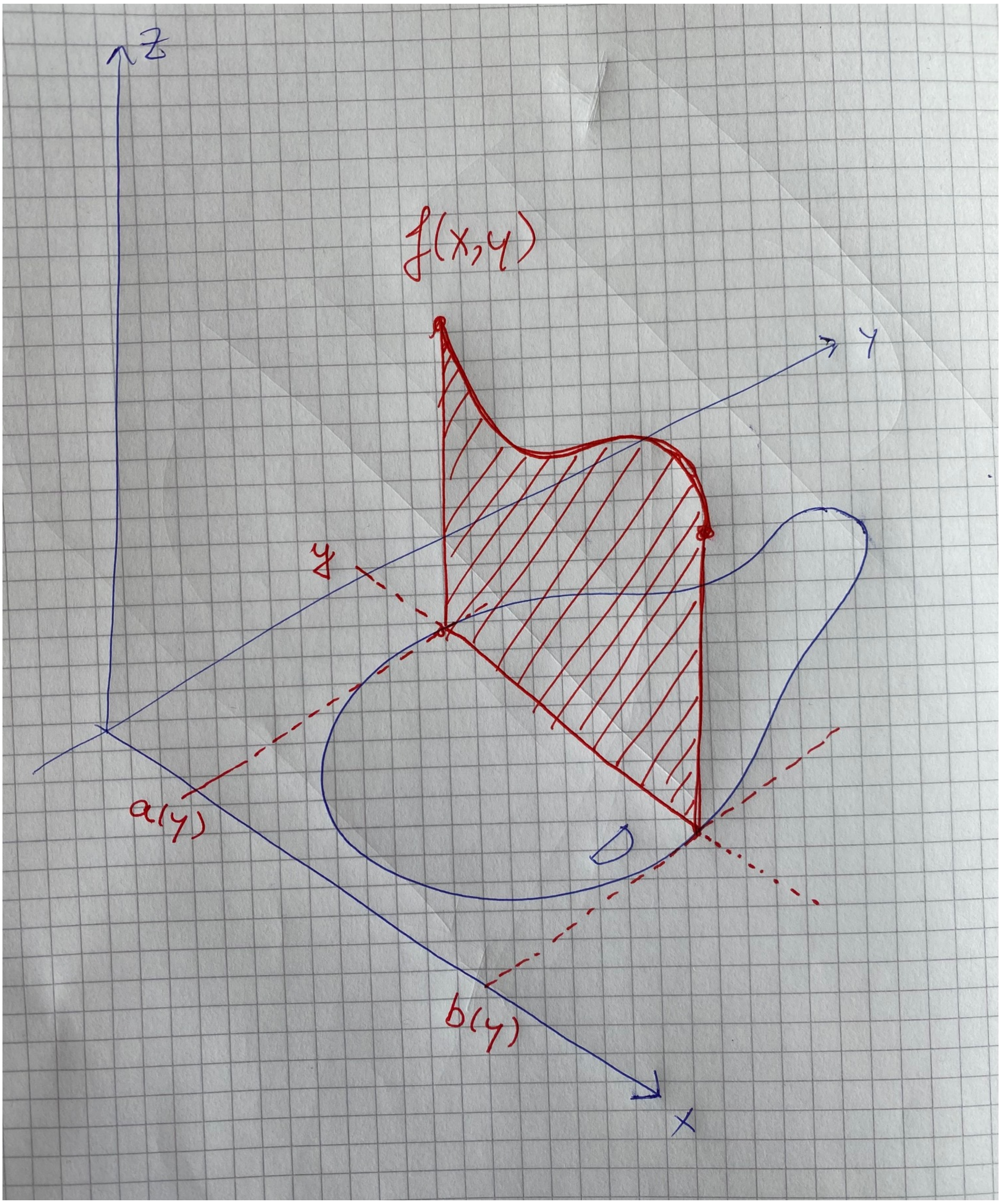
3. Dobbeltintegralet som et volum

La D være et x-simpelt område i XY-planet, og anta at $f(x, y) > 0$ er positiv og definert på hele D. La legemet K være alle punkter (x, y, z) slik at $(x, y) \in D$ og $0 \le z \le f(x, y)$. Med andre ord hele det romlige området under grafen til $f(x, y)$, og over XY-planet.

For en gitt y_0 vet vi at det enkle integralet

$$A(y_0) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0) \, dx$$

er arealet av tverrsnittet mellom K og planet $y = y_0$.



Vi lærte i MA-178 at volumet til K var lik integralet

$$V = \int_c^d A(y)\, dy$$

og hvis vi erstatter $A(y)$ med integralet over, får vi

$$V = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$

Altså kan vi tolke dobbeltintegralet som volumet til K:

$$V = \iint_D f(x,y)\; dA\,.$$

4. Regneregler

La $f(x,y)$ og $g(x,y)$ være to funksjoner, begge definert på området D. Da er

$$\iint_D f(x,y) + g(x,y)\; dA = \iint_D f(x,y)\; dA + \iint_D g(x,y)\; dA\,. \tag{7}$$

La $c \in \mathbb{R}$ være et reellt tall. Da er

$$\iint_D c \cdot f(x,y)\; dA = c \cdot \iint_D f(x,y)\; dA\,. \tag{8}$$

Dersom området D kan deles opp i to mindre områder D_1 og D_2 slik at disse overlapper langs en kurve i planet, gjelder formelen

$$\iint_{D_1} f(x,y)\; dA + \iint_{D_2} f(x,y)\; dA = \iint_D f(x,y)\; dA\,. \tag{9}$$

Dersom $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in D$, så er

$$\iint_D f(x,y)\; dA = \text{volumet mellom } D \text{ og grafen til } f(x,y)\,. \tag{10}$$

Dersom $f(x,y) \leq 0$ for alle $(x,y) \in D$, så er

$$\iint_D f(x,y)\; dA = \text{-volumet mellom } D \text{ og grafen til } f(x,y)\,. \tag{11}$$

5. Beregning ved "inspeksjon"

Når læreboken bruker uttrykket "by inspection", så menes det som oftest at vi skal finne integralet det snakkes om *uten* å gjøre antiderivasjoner. Det er som regel meningen at vi skal bruke regnereglene over i kombinasjon med geometriske betraktninger som forenkler situasjonen.

I disse oppgavene er det nødvendig å få et klart bilde av hvordan integrasjonsområdet ser ut.

Eksempel 3 La D være området i XY-planet definert ved ulikheten

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 4\,.$$

Regn ut

$$I = \iint_D 3\; dA\,.$$

Vi skriver først om ulikheten over som

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 4\,.$$

Nå ser vi at området D er en sirkel med radius 2 sentrert i punktet $(0,1)$. Videre er funksjonen vi integrerer positiv, og derfor er integralet I lik volumet mellom D og grafen til funksjonen som er kontant lik 3. Dette volumet er derfor lik arealet til D multiplisert med 3.

$$I = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi\,.$$

Eksempel 4 La D være området i XY-planet definert ved ulikheten

$$x^2 + y^2 \leq 1\,.$$

Regn ut

$$I = \iint_D x \; dA\,.$$

Vi ser at området D er en sirkel med radius 1 sentrert i origo.

Funksjonen $f(x) = x$ vi integrerer er odde, som betyr at $f(-x) = -f(x)$. I tillegg er D også speilsymmetrisk i XY-planet om linjen $x = 0$ ((tegning)). Vi deler opp området $D = D_{x\leq 0} \cup D_{x\geq 0}$ der $D_{x\leq 0}$ består av alle $x \in D$ der $x \leq 0$ og tilsvarende for $D_{x\geq 0}$. Integralet kan, ved hjelp av regel (9), skrives som

$$I = \iint_{D_{x\leq 0}} x \; dA + \iint_{D_{x\geq 0}} x \; dA$$

Begge integraler beregner det samme volumet, men med forskjellig fortegn. Deres sum blir derfor 0.

Eksempel 5 La D være området i XY-planet definert ved ulikheten

$$x^2 + y^2 \leq 1\,.$$

Regn ut

$$I = \iint_D 3 + x \; dA\,.$$

Vi bruker regneregel (7) og får

$$I = \iint_D 3 \; dA + \iint_D x \; dA\,.$$

Vi har sett at det første integralet er lik arealet til D multiplisert med 3, og vi har sett at det andre integralet er lik null siden integranden er en odde funksjon i x og D er symmetrisk i x. Dermed blir

$$I = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 + 0 = 3\pi\,.$$

Eksempel 6 La R være bestemt av ulikhetene $1 \leq x \leq 2$ og $-1 \leq y \leq 1$. Vi har sett forskjellige måter å regne ut integralet

$$\iint_R 3 \; dA\,.$$

1. Ved å bruke definisjonen:

$$\begin{aligned}
\iint_R 3 \; dA &= \lim_{M,N\to\infty} \Sigma_{j=1}^{N} \Sigma_{i=1}^{M} 3 \cdot \Delta A \\
&= \lim_{M,N\to\infty} N \cdot M \cdot 3 \cdot \Delta A \\
&= \lim_{M,N\to\infty} N \cdot M \cdot 3 \cdot (2-1) \cdot (1-(-1))/MN \\
&= \lim_{M,N\to\infty} 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6\,.
\end{aligned}$$

2. Ved "inspeksjon": Volumet mellom R og grafen til integranden 3 er lik arealet til R multiplisert med 3, så integralet er lik $(2-1)\cdot(1-(-1))\cdot 3 = 6$.

3. Ved gjentatt integrasjon:

$$\begin{aligned}
\iint_R 3\, dA &= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=1}^{2} 3\, dx\, dy \\
&= \int_{y=-1}^{1} [3x]_{x=1}^{2}\, dy \\
&= \int_{y=-1}^{1} 3\cdot 2 - 3\cdot 1\, dy \\
&= \int_{y=-1}^{1} 3\, dy \\
&= [3y]_{y=-1}^{1} = 3 - 3\cdot(-1) = 6.
\end{aligned}$$

Når integranden blir mer komplisert enn i dette eksemplet, er det oftest metode 3 som fører frem. Men vi hvis vi er heldige kan inspeksjon ofte spare oss for en del regning.

Referanser

[1] Robert Adams and Christopher Essex, *Calculus*: *A complete course*, 10th ed., Addison Wesley, 2021.

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: `sverreal@uia.no`
URL: `https://home.uia.no/sverreal`