MA-222. UKE 37: POLARE KOORDINATER, TRIPPELINTEGRALER

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Innledning

Vi skal denne uken snakke om et viktig spesialtilfelle av *koordinatskifte i to variabler* som kalles *integrasjon med polare koordinater*. Dette er beskrevet på de to første sidene i kapittel 15.4 i læreboken (14.4 i 9. utgave!). Deretter skal vi definere integrasjon i rommet, altså trippelintegrasjon, slik det er beskrevet i 15.5 i [1] (14.5 i utgave 9!).

Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

2. Integrasjon med polare koordinater

Et punkt i planet med polare koordinater (r, θ) har som vi vet kartesiske koordinater

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r \cdot \cos\theta \\ y(r,\theta) &= r \cdot \sin\theta\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Vi kan tenke på x og y som funksjoner av r og θ som avbilder punkter (r, θ) i det polare planet over i det kartesiske XY-planet.

Eksemplet vi kan ha i tankene er å la P være et område i det polare planet gitt ved ulikhetene

$$\begin{aligned} 0 \leq & r \leq 1 \\ 0 \leq & \theta \leq 2\pi\,. \end{aligned}$$

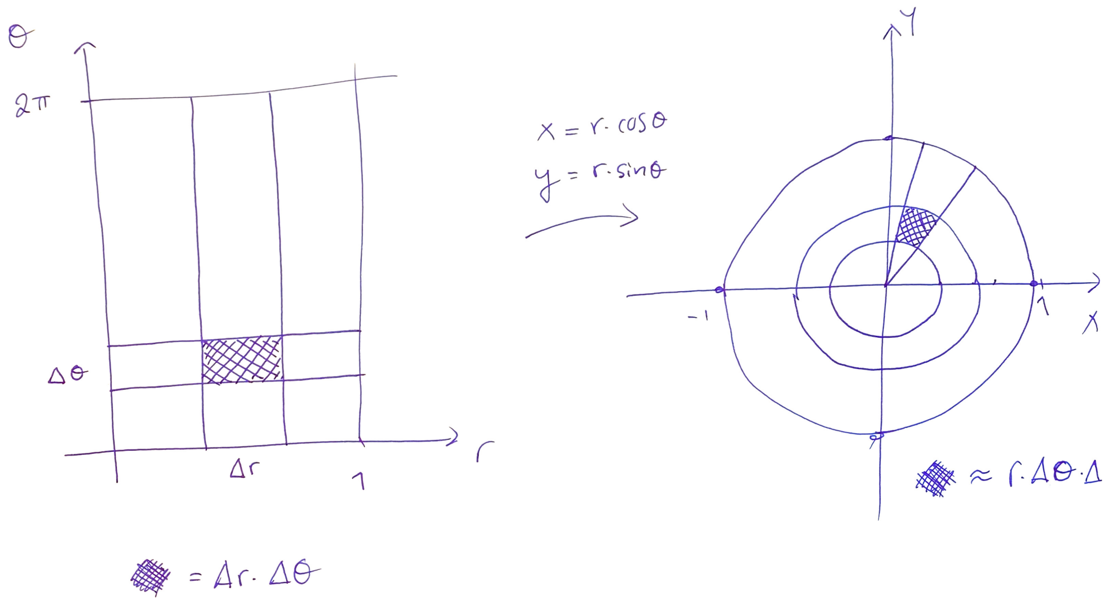
Når vi bruker koordinatskiftefunksjonene (1), blir disse punktene sendt til det kartesiske planet slik at de utgjør et område D som er lik enhetsdisken av radius 1 og senter i origo. Vi kan se dette fordi $(x, y) \in D$ betyr at $x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 \leq 1^2$, samtidig som at θ kan anta alle vinkelverdier i hele sirkelen. Se figur 1.

Vi skal bruke dette til å løse følgende dobbeltintegral:

$$\iint_D 1 \; dA \tag{2}$$

Vi vet, ved inspeksjon, at dette integralet er lik π, men vi skal nå vise hvordan man regner det ut ved hjelp av å gjøre et polart koordinatskifte.

Date: 16. november 2023.



FIGUR 1. Polare til kartesiske koordinater

Se på figur 1: Anta nå at vi deler hele rektanglet i det polare planet til venstre opp i et rutenett av små, og like store, delrektangler som alle har bredde Δr og høyde $\Delta\theta$. Som vanlig velger vi også et punkt (r_i, θ_j) i hvert delrektangel, og kaller bildet i det kartesiske planet til høyre for $(x_{i,j}, y_{i,j})$.

Så flytter vi hele dette rutenettet over til høyre i bildet ved å bruke avbildningen (1). Vi får da en sirkel som før, og hvert lille delrektangel blir en liten sektorbit, som det skraverte området i tegningen.

Integralet (2) kan nå tilnærmes ved Riemannsummen

$$\iint_D 1 \; dA \approx \sum_{i,j} 1 \cdot \Delta A_{i,j} \tag{3}$$

der $\Delta A_{i,j}$ er arealet til den lille sektorbiten som inneholder $(x_{i,j}, y_{i,j})$. Når vi velger en finere og finere oppdeling nærmer denne summen seg integralet vi ønsker å beregne.

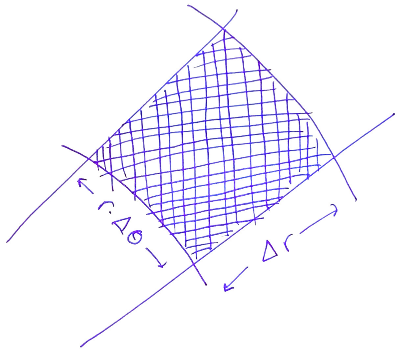
Arealet $\Delta A_{i,j}$ kan tilnærmes ved å observere at når Δr og $\Delta\theta$ er små, så er sektorbiten omtrent et rektangel. Sidekantene til dette rektanglet er $r\Delta\theta$ og Δr, så arealet $\Delta A_{i,j} \approx r\Delta\theta\Delta r$, se figur 2.

Tilnærmingen (3) kan nå omskrives som:

$$\iint_D 1 \; dA \approx \sum_{i,j} 1 \cdot r_i \; \Delta\theta\Delta r\,. \tag{4}$$

Nå lar vi antall delrektangler gå mot uendelig som vanlig, og da blir summen over til det bestemte integralet:

$$\iint_D 1 \; dA = \iint_R 1 \cdot r \; d\theta dr = \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r \; d\theta dr\,. \tag{5}$$



Figur 2. Arealet av et kvadrat i det polare planet er et segment med areal som er tilnærmet lik $r \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$

Legg merke til at det dukket opp en faktor r når vi byttet til polare koordinater!

Det innerste integralet er enkelt å regne ut:

$$\int_0^{2\pi} r \, d\theta = r \cdot 2\pi$$

så

$$\int_{r=0}^{r=1} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r \, d\theta \right) dr = \int_0^1 r \cdot 2\pi \, dr$$
$$= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = 2\pi/2 = \pi \, .$$

I eksemplet over var integranden $f(x, y) = 1$ så enkel som mulig for å lettere å kunne fokusere på koordinatskiftet. Men vi kan også gjøre det samme som over med en generell integrand. Hvis $f(x, y)$ er funksjonen vi ønsker å integrere, blir tilnærmingen (4) lik

$$\iint_D f(x, y) \, dA \approx \sum_{i,j} f(x_{i,j}, y_{i,j}) \cdot r_i \, \Delta\theta \Delta r \, . \tag{6}$$

Husk at $x_{i,j} = r_i \cos(\theta_j)$ og $y_{i,j} = r_i \sin(\theta_j)$. Hvis R er et område i det polare planet som avbilder til D i det kartesiske planet, kan vi som før bytte koordinater ved formelen:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R f(r \cos\theta, r \sin\theta) \cdot r \, dr \, d\theta \, . \tag{7}$$

Legg merke til at det dukket opp en faktor r når vi byttet til polare koordinater!

Eksempel 1 La D være gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 1 \, .$$

Beregn integralet

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \, .$$

Området D er en disk av radius 1 med senter i origo, og kan beskrives i polare koordinater ved ulikhetene

$$\begin{aligned} 0 \leq & r \leq 1 \\ 0 \leq & \theta \leq 2\pi\,. \end{aligned}$$

Integralet I kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\; dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta}\right) \cdot r\; d\theta\; dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot r\; d\theta\; dr \\ &= \int_0^1 r^2 \cdot 2\pi\; dr \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^1 \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

(Kan du beregne dette ved inspeksjon også?)

Bemerkning (dette rekker vi sikkert ikke å si på forelesning) I MA-178 brukte vi blant annet *substitusjonsmetoden* for å beregne ubestemte integraler. Metoden ble presentert som kjerneregelen i revers, og lot oss finne integraler ved formelen

$$\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\; du = \int_a^b g(u(t)) \cdot u'(t)\; dt\,. \tag{8}$$

Her er $u(t)$ en voksende (eller avtagende) og deriverbar funksjon som kalles *kjernen* i den sammensatte funksjonen $g(u(t))$. Legg merke til at denne formelen ligner fælt på koordinatskifteformelen (7)! Også her bytter vi mellom koordinatene t og u i håp om at den ene gir et integral som er lettere å hanskes med. F.eks. kunne vi løse dette integralet slik:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=2} t \cdot e^{-t^2}\; dt &= \int_{u=0}^{u=-4} e^u \cdot (-\frac{1}{2})\; du \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cdot e^u\right]_{u=0}^{u=-4} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[e^{-4} - e^0\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-4}\right)\,. \end{aligned}$$

Koordinatskiftet skjer på linje 1 der vi gjør substitusjonen $u = -t^2$ som gir oss at $du = -2t \cdot dt$.

Grunnen til at (8) ligner på (7) er at de fremkommer ved å følge samme geometriske idé om koordinatskifte. Integralet til venstre av substitusjonsformelen (8) skjer over intervallet $[u(a), u(b)]$. Vi velger en oppdeling av intervallet $[a, b]$ i N like store deler der hvert delintervall har bredde $\Delta x = (b-a)/N$. Som vanlig lar vi x_i være midtpunktet i delintervallet med indeks i. Dersom vi bruker funksjonen $u(t)$ på disse delintervallene, får vi en oppdeling

$$u(a) \leq u(a+\Delta x) \leq u(a+2\Delta x) \leq \ldots \leq u(b)$$

av $[u(a), u(b)]$ i N delintervall. Når Δx er liten, er da bredden Δu_i på delintervall med indeks i omtrent $\Delta x \cdot u'(x_i)$. Vi kan bruke denne inndelingen til å lage en Riemannsum som tilnærmer

$$\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\ du \approx \sum_i g(u(x_i)) \cdot \Delta u_i \approx \sum_i g(u(x_i)) \cdot u'(x_i) \cdot \Delta x\,. \tag{9}$$

Når vi øker antall delintervaller, nærmer denne tilnærmingen seg (8) i grensen.

Det finnes en helt analog måte å gjøre dette på med to variable i stedet for én. Dette er beskrevet i kapittel 15 i læreboken, men vi har begrenset oss til spesialtilfellet som omhandler overgangen mellom polare og kartesiske koordinater. Dette er omtalt på de to første sidene av kapittel 15.4 (14.4 i utgave 9!).

3. Integrasjon av funksjoner av tre variable

Vi ønsker å utvide definisjonen av integrasjon over områder i planet til å gjelde integrasjon av funksjoner av tre variable over områder i rommet.

La $f(x, y, z)$ være en slik funksjon, og anta at definisjonsmengden til f er gitt ved ulikhetene

$$\begin{aligned} a \leq & x \leq b \\ c \leq & y \leq d \\ e \leq & z \leq f\,. \end{aligned}$$

Med andre ord er definisjonsmengden til $f(x, y, z)$ lik et regulært firkantet prisme R i XYZ-rommet.

Nå går vi frem akkurat på samme måte som da vi gjorde med én og to variabler: La L, M, N være naturlige tall. Vi deler intervallene $[a, b]$, $[c, d]$ og $[e, f]$ inn i like store delintervaller:

$$\begin{aligned} \Delta x = (b-a)/L \text{ og } x_i = a + (i - 0.5) \cdot \Delta x \\ \Delta y = (d-c)/M \text{ og } y_j = c + (j - 0.5) \cdot \Delta y \\ \Delta z = (f-e)/N \text{ og } z_k = d + (k - 0.5) \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Hvert delprisme i oppdelingen av R får derfor volum $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, og vi definerer nå det triple bestemte integralet av $f(x, y, z)$ over prismet R til å være grenseverdien

$$\iiint_R f(x, y, z)\ dV = \lim_{L,M,N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V\,. \tag{10}$$

Med andre ord: Hvert trippel (i, j, k) bestemmer ett lite delprisme i R og for dette delprismet finner vi verdien av f i midtpunktet (x_i, y_j, z_k). Så multipliserer vi med ΔV, og summerer vi alle disse verdiene.

Når vi lar L, M og N vokse, blir volumene $\Delta V = (b-a)(d-c)(f-e)/LMN$ mindre samtidig som vi får flere ledd i summen. Grenseverdien, hvis den eksisterer, kaller vi *det bestemte integralet av $f(x, y, z)$ over R.*

3.1. Gjentatt integrasjon.

Akkurat som med to variable kan vi regne ut trippelintegraler ved gjentatt integrasjon. La $D \in \mathbb{R}^2$ være et integrasjonsområde i XY-planet, og $l(x, y) \leq L(x, y)$ være to kontinuerlige funksjoner definert på D.

La R være legemet i rommet gitt som alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ der $(x, y) \in D$ og $l(x, y) \leq z \leq L(x, y)$.

Da er

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dV = \iint_D \left(\int_{l(x,y)}^{L(x,y)} f(x,y,z)\ dz \right)\ dV$$

((tegning))

3.2. **Volum.** La D være legemet i rommet som er begrenset av planene:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x &= 1 \\ x &= -1 \\ y &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

og grafen til funksjonen $f(x,y) = x^2 + y^2$. Beregn $\iiint_D\ dV$.

Integrasjonsområdet kan også gis ved ulikhetene

$$\begin{aligned} -1 \leq &x \leq 1 \\ -1 \leq &y \leq 1 \\ 0 \leq &z \leq f(x,y) \end{aligned}$$

Trippelintegralet er derfor lik

$$\iiint_D\ dV = \int_{x=-1}^{x=1} \left(\iint_{R_x} 1\ dA \right)\ dx\,.$$

Området R_{x_0} er snittet mellom D og planet $x = x_0$, og er gitt ved ulikhetene

$$\begin{aligned} -1 \leq &y \leq 1 \\ 0 \leq &z \leq x^2 + y^2\,. \end{aligned}$$

Det innerste integralet over er z-simpelt og blir derfor

$$\iint_{R_x} 1\ dA = \int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{x^2+y^2} 1\ dz\ dy$$

så trippelintegralet blir derfor

$$\iiint_D 1\ dV = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{x^2+y^2} 1\ dz\ dy\ dx$$

og resten av utregningen gjøres ved gjentatt integrasjon, som før:

$$\begin{aligned}\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=0}^{x^2+y^2} 1\ dz\ dy\ dx = &= \int_{x=-1}^{1}\left(\int_{y=-1}^{1} x^2+y^2\ dy\right)\ dx\\ &= \int_{x=-1}^{1}\left(\left[yx^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=-1}^{1}\right)\ dx\\ &= \int_{x=-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}-(-x^2-\frac{1}{3})\right)\ dx\\ &= \int_{x=-1}^{1} 2\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\ dx\\ &= 2\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right]_{x=-1}^{1}\\ &= 2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,.\end{aligned}$$

Eksempel 2 ([1, 15.5 eksempel 1]) Beregn integralet "ved inspeksjon":

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} 2+x-\sin(z)\ dV\,.$$

Integrasjonsområdet K er en kule av radius a, sentrert i origo. Funksjonen $f(x,y,z)=x$ er odde i x, dvs. at $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$. Samtidig er K speilsymmetrisk om planet $x=0$. Dette betyr at

$$\iiint_K x\ dV = \iiint_{K_{x\le 0}} x\ dV + \iiint_{K_{x\ge 0}} x\ dV = 0\,.$$

Funksjonen $\sin(z)$ er odde i z, og siden kula K også er speilsymmetrisk om planet $z=0$, blir også bidraget fra denne funksjonen 0 når vi integrerer over K. Det betyr at

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} 2+x-\sin(z)\ dV = \iiint_K 2\ dV$$

som er lik 2 multiplisert med volumet av K. Svaret blir derfor

$$I = 2\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^3}{3}\,.$$

Eksempel 3 ([1, 15.5 eksempel 3]) La T være tetraederet med hjørner $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$.

$$\iiint_T y\ dV$$

Eksempel 4 Skriv om

$$\int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_x^y f(x,y,z)\ dz\right)\ dy\right)\ dx$$

slik at integrasjonsrekkefølgen er omvendt.

Referanser

[1] Robert Adams and Christopher Essex, *Calculus*: *A complete course*, 10th ed., Addison Wesley, 2021.

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: sverreal@uia.no
URL: https://home.uia.no/sverreal