MA-222. UKE 41: 2. ORDENS PARTIELLE DIFFERENSIALLIKNINGER: VARMELIKNINGEN

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Innledning

Vi begynner nå å snakke om partielle differensiallikninger, og kommer til å holde på med dette emnet i resten av semesteret. Fra og med i dag skal vi også bytte til læreboken [1], og holde oss i kapittel 9.

Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

1.1. **Oversikt.** Resten av kurset skal handle om å forstå og, under visse omstendigheter, kunne løse følgende de to første av følgende differensiallikninger:

(1) **Varmelikningen:** $u_t(x,t) = \kappa \cdot u_{xx}(x,t) \qquad \kappa > 0$

(2) **Bølgelikningen:** $u_{tt}(x,t) = c^2 \cdot u_{xx}(x,t)$

(3) **Laplace-likningen:** $0 = u_{xx}(x,t) + u_{yy}(x,t)$

Det som skiller disse differensiallikningene fra de vi studerte i MA-178 og MA-179, er at de inneholder partielt deriverte i begge variablene x og t. Differensiallikningene over forekommer i versjoner med flere variable, men vi skal begrense oss til kun én ekstra dimensjon x ut over tidsvariabelen t.

Planen for resten av høsten er som følger:

1) Friske opp partiell derivasjon samt et par relevante eksempler fra MA-178
2) Gi en begrunnelse for hvorfor likningene over heter det de gjør
3) Se litt på hva slags oppførsel vi kan forvente oss av løsningene
4) Finne de generelle løsningene til begge likningene
5) Finne de spesielle løsningene som passer med gitte initialbetingelser

Date: 16. november 2023.

Av disse forskjellige emnene er det overraskende nok det siste punktet som kommer til å kreve mest innsats for å forstå ordentlig.

Når vi løste lineære 2. ordens ordinære differensiallikninger i MA-178, så fantes det essensielt to forskjellige løsninger. Disse to ble så brukt til å lage alle mulige løsninger ved å ta lineære kombinasjoner. Vi minner om hvordan det gikk til i følgende eksempel:

Eksempel 1 Fra MA-178 vet vi at differensiallikningen

$$y'' - y = 0$$

har generell løsning

$$y(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \tag{4}$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Hvis vi f.eks. vet at $y(0) = 1$ og $y'(0) = -2$, kan vi bruke dette til å bestemme c_1 og c_2. Først finner vi $y'(t)$ fra $y(t)$

$$y'(t) = c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t}$$

og så bruker vi dette til å sette opp et system med to likninger og to ukjente:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = c_1 + c_2 \\ -2 = y'(0) &= c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = c_1 - c_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Dette systemet kan vi så løse for c_1 og c_2, og vi finner da at den spesielle løsningen er

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}\,.$$

I MA-179 lærte vi om vektorer og lineære kombinasjoner av dem. Uttrykt i dette språket kan vi derfor si at mengden av løsninger (4) er alle lineære kombinasjoner av de to funksjonene e^t og e^{-t}. Fordi det kun er to funksjoner innvolvert, blir likningssystemet (5) lite nok til at det er enkelt å håndtere.

Det er et par ting som gjør det siste steget i eksemplet over mer komplisert når vi løser varme- eller bølgelikningen. Det viser seg nemlig at den generelle løsningen ikke er en lineær kombinasjon av to funksjoner, men av uendelig mange! Den generelle løsningen av varmelikningen viser seg f.eks. å være

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot f_n(x) \cdot g_n(t)\,, \tag{6}$$

der hver funksjon $f_n(x)$ og $g_n(t)$ er kjent for hver n, mens D_n er valgfrie konstanter. Dersom vi forsøker å bruke initialbetingelser for å finne D_n for alle $n = 0, 1, 2 \ldots$, får vi fort uendelig mange likninger med uendelig mange ukjente. Det lar seg gjøre å løse slike systemer, men det krever teknologi ut over det vi har lært i MA-179. Denne teknologien kalles *Fourier-rekker* og er oppkalt etter Joseph Fourier (1768-1830) som lanserte den strålende idéen det er å skrive funksjoner som uendelige lineærkombinasjoner av trigonometriske funksjoner.

2. Partiell derivasjon

Dersom $f(x,y)$ er en funksjon av to variable, lærte vi i MA-179 at vi kan snakke om retningsderiverte av $f(x,y)$: Vi valgte oss en retning i xy-planet representert ved en enhetsvektor $\mathbf{v}$, og ønsket så å vite den momentane vekstraten til $f(x,y)$ i det vi beveger oss bort fra et gitt punkt (x_0, y_0) i retning $\mathbf{v}$.

To retninger som peker seg ut er de hvor vi kun beveger oss i én av akseretningene av gangen, dvs. når retningsvektoren **v** er $[1\ 0]^T$ eller $[0\ 1]^T$. De tilhørende retningsderiverte kaller vi de *partielt deriverte* av $f(x, y)$ med hensyn på henholdsvis x og y, og vi skrev dem slik:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) && \left(\text{Når } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T\right) \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) && \left(\text{Når } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T\right).
\end{aligned}
$$

Vi husker at partiell derivasjon av $f(x, y)$ med hensyn på f.eks. x gjøres ved å betrakte den andre variabelen y som konstant og så derivere f som om den kun avhenger av den éne variabelen x.

Eksempel 2 La $f(x, y) = x \cdot e^{xy}$. Da er

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot e^{xy}) = 1 \cdot e^{xy} + x \cdot (ye^{xy}) = (1 + xy) \cdot e^{xy} \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot e^{xy}) = x^2 \cdot e^{xy}
\end{aligned}
$$

2.1. **2. ordens deriverte.** Ved å gjøre gjentatt partiell derivasjon, får vi forskjellige 2.ordens deriverte. Vi skriver f.eks.

$$
f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)
$$

når vi partiellderiverer to ganger: først med hensyn på variabelen x, og deretter med hensyn på y. Resultatet er en ny funksjon som vi kunne fortsatt å derivere (forutsatt at det lar seg gjøre), men vi kommer ikke til å studere høyere ordens deriverte i MA-222.

Det er fire forskjellige måter å skaffe oss 2.ordens deriverte på, ved å variere hvilke variable vi deriverer med hensyn på først, og sist:

$$
\begin{aligned}
\text{Først } x\text{, og så } x \text{ igjen:} \quad & f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) \\
\text{Først } x\text{, og så } y\text{:} \quad & f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) \\
\text{Først } y\text{, og så } x\text{:} \quad & f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) \\
\text{Først } y\text{, og så } y \text{ igjen:} \quad & f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

Legg merke til rekkefølgen på indeksene. Konvensjonen er at man leser dem fra venstre til høyre når vi skal finne ut hvilken rekkefølge vi skal derivere i. Så når det f.eks. står f_{xy}, betyr det at vi deriverer f først med hensyn på x, og så med hensyn på y.

Som regel har imidlertid rekkefølgen ikke noe å si i praksis. Dersom alle de 2. ordens deriverte er kontinuerlige funksjoner, så er nemlig $f_{xy} = f_{yx}$ (Schwarz' teorem).

Eksempel 3 La $f(x, y) = x \cdot e^{xy}$. Vi kjenner de 1. ordens partielt deriverte fra eksempel 2, så de 2. ordens deriverte blir:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((1 + xy) \cdot e^{xy}) = y \cdot e^{xy} + (1 + xy) \cdot ye^{xy} = (1 + y + xy)e^{xy}$$
$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((1 + xy) \cdot e^{xy}) = x \cdot e^{xy} + (1 + xy) \cdot xe^{xy} = (2x + x^2y)e^{xy}$$
$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cdot e^{xy}) = 2x \cdot e^{xy} + x^2y \cdot e^{xy} = (2x + x^2y) \cdot e^{xy}$$
$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot e^{xy}) = x^2 \cdot x \cdot e^{xy} = x^3 \cdot e^{xy}\,.$$

Legg merke til at $f_{xy} = f_{yx}$.

3. Varmelikningen

En partiell differensiallikning beskriver en sammenheng mellom forskjellige partielt deriverte av en funksjon. Varmelikningen er en slik sammenheng som er en fysisk modell for hvordan varme sprer seg i et legeme. Vi skal se på hvordan dette arter seg i et legeme som er essensielt 1-dimensjonalt; dvs. en stav av tykkelse som er liten relativt til lengden. Før vi gjør det, skal vi imidlertid varme opp[1] med et viktige eksempel fra MA-178 som beskriver varmeutviklingen i et punktlegeme (0-dimensjonalt).

3.1. **Newtons avkjølingslov.** I MA-178 (og MA-179) lærte vi mest om det som kalles *ordinære differensiallikninger* som uttrykte sammenhenger mellom de deriverte av en funksjon $u(t)$ av én variabel t, som ofte beskrev tid.

En av disse var avledet fra Newtons avkjølingslov, som vi minner om nå. La $u(t)$ beskrive gjennomsnittstemperaturen til et legeme som er plassert i et rom med uendelig varmekapasitet. Vi kan f.eks. tenke oss at legemet vi snakker om er en stakkars kopp med varm kaffe i et kaldt og uvennlig univers. La T_0 være universets temperatur. Siden vi antar at dette rommet har uendelig varmekapasitet, kommer ikke T_0 til å endre seg over tid, i motsetning til kaffen.

Newtons avkjølingslov sier at den momentane endringsraten til $u(t)$ er proposjonal med forskjellen i temperatur mellom kaffen og universet. Med andre ord oppfyller funksjonen $u(t)$ differensiallikningen

$$u'(t) = \kappa \cdot \Big(T_0 - u(t)\Big) \tag{7}$$

der κ er en konstant som beskriver de termodynamiske egenskapene til kaffen. Merk at i vårt eksempel gir det kun fysisk mening at $\kappa > 0$: Dersom $T_0 - u(t) < 0$, så er universet kaldere enn kaffekoppen, som betyr at $u(t)$ må avta med tiden. Med andre ord må $u'(t) < 0$, som betyr at κ må være positiv. Dersom κ er en liten verdi, kommer varmeendringen i kaffen til å skje sakte sammenlignet med dersom κ er stor.

Vi lærte i MA-178 at den generelle løsningen til differensiallikningen (7) var gitt ved

$$u(t) = c \cdot e^{-\kappa t} + T_0 \tag{8}$$

der c er en vilkårlig konstant. Vi husker at vi kalte dette en generell løsning fordi alle slike $u(t)$ oppfyller likningen og er derfor i utgangspunktet like gode. Dersom man ønsker å vite nøyaktig hvilken av disse løsningene som beskriver temperaturen i vår kaffe, må vi vite noe mer om det fysiske systemet vi beskriver. Slik informasjon kalte vi *initialbetingelser*, og

[1]vittig, ikke sant?

kan f.eks. være kunnskap om $u(t_0)$ eller den deriverte $u'(t_0)$ ved ett eller annet tidspunkt t_0.

Dersom vi f.eks. vet at $u(0) = 20$, så finner vi c ved å sette inn $t = 0$ i løsningen, og løse likningen

$$20 = c \cdot e^{-\kappa \cdot 0} + T_0 = c + T_0$$

som gir oss $c = 20 - T_0$.

3.2. **Varmelikningen.** Anta at vi har gitt en rett og relativt tynn stav av lengde $l > 0$. Som modell for dette legemet bruker vi intervallet $[0, l]$ av den reelle tallinjen. Hvert punkt i staven blir derfor identifisert med en $x \in [0, l]$ som da måler avstanden, målt langs lengdeaksen, fra en valgt ende. Endepunktene til staven har derfor x-koordinater 0 og L, mens $x = l/2$ angir midten av staven.

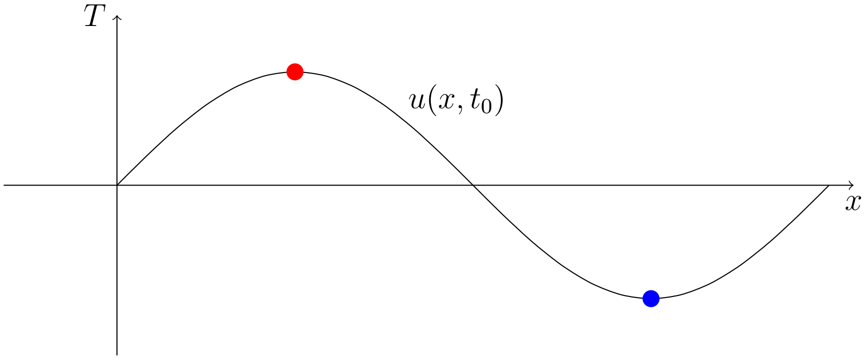
Vi antar at staven har en temperaturprofil som er gitt ved en reell funksjon $u(x, t)$. Med dette mener vi i tidspunktet t har punktet på staven med koordinat x temperaturen $u(x, t) \in \mathbb{R}$. Dersom vi låser x og betrakter funksjonen som en funksjon at kun variabelen t, ser vi hvordan temperaturen i x endrer seg over tid. Vi antar at staven er isolert slik at varme ikke kan forlate legemet unntatt i endepunktene. Varmen kan med andre ord kun bevege seg langs stavens lengdeakse ettersom tiden går.

Differensiallikningen (1) beskriver den deriverte i tidsretningen til ethvert punkt på staven:

$$u_t(x, t) = \kappa \cdot u_{xx}(x, t)\,. \tag{9}$$

Konstanten $\kappa > 0$ er positiv. Før vi setter i gang med å se på løsninger av denne likningen skal vi bruke litt tid på å forstå hvorfor denne likningen er en fysisk riktig måte å beskrive varmefordelingen over tid for vårt system (staven).

Anta temperaturen i staven ved tidspunktet $t = t_0$ følger kurven i figuren under:



Vi tenker oss altså at endepunktene og midtpunktet holder 0 grader, ved $t = t_0$, og at den første halvparten er over frysepunktet mens den andre halvparten er under. Vi ser av figuren at den dobbeltderiverte i x-retningen er negativ i den første halvdelen av staven, og positiv i den andre halvdelen. Siden $\kappa > 0$ sier derfor (9) at den tidsderiverte u_t er negativ i den første halvdelen og positiv i den andre. Med andre skal temperaturen avta i den første halvdelen og øke i den andre.

Sammenlignet med vår intuitive forståelse av hvordan varme oppfører seg, stemmer dette: Hvis vi kikker på temperaturene rundt det røde punktet i figuren over, finner vi utelukkende lavere temperaturer. Vi forventer derfor at dette punktet vil avkjøles over tid. Dette forventer vi også når vi ser på et hvilket som helst annet punkt i den første halvdelen av staven: I området rundt et slikt punkt vil det være mer av kaldere enn varmere områder, og derfor forventer vi en avkjøling. Tilsvarende forventer vi en oppvarming i den andre halvparten av staven.

3.3. **Hvorfor kaller vi det "varmelikningen" ?** Boken gir en utledning [1, Appendiks side 579] av likningen som vi ikke skal gjenta her. I stedet skal vi se hvordan vi kan, ved å diskretisere modellen vår, se på varmelikningen som et system av ordinære differensiallikninger av en type vi har sett på før.

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$, og punkter $x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N$ slik at $x_i - x_{i-1} = \Delta = (X_N - x_0)/N$. Da er

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{2\Delta} \cdot \Big(f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})\Big)$$

og

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{2\Delta} \cdot \Big(f'(x_{n+1}) - f'(x_{n-1})\Big)$$

som vi kan kombinere og få

$$\begin{aligned} f''(x_n) &\approx \frac{1}{2\Delta} \cdot \left(\frac{1}{2\Delta} \cdot (y_{n+2} - y_n) - \frac{1}{2\Delta} \cdot (y_n - y_{n-2})\right) \\ &= \frac{1}{4\Delta^2} \cdot \Big(y_{n+2} - y_n\Big) + \frac{1}{4\Delta^2} \cdot \Big(y_{n-2} - y_n\Big) \end{aligned}$$

Her har vi skrevet $y_i = f(x_i)$ for å spare plass.

La $\kappa_N = \kappa/4\Delta^2$. Dersom vi anvender diskretiseringen over på $u_{xx}(x,t)$, gir varmelikningen et system av differensiallikninger

$$\begin{aligned} u_t(x_n,t) = \kappa \cdot u_{xx}(x,t) \approx \kappa_N \cdot \Big(u(x_{n+2},t) - u(x_n,t)\Big) + \\ \kappa_N \cdot \Big(u(x_{n-2},t) - u(x_n,t)\Big) \end{aligned} \tag{10}$$

Dersom vi tenker oss at den varmeledende staven består like store biter med midtpunkter $x_0, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n}, x_{2n+2} \ldots$. Vi antar at hver bit er liten i forhold til stavens lengde, så vi kan anta at temperaturen er tilnærmet konstant over hver bit. Hvis vi så ser på varmeflyten mellom biten med midtpunkt x_{2n} og biten til høyre med midtpunkt x_{2n+2}, vil den tidsderiverte av temperaturen oppfylle Newtons avkjølingslov 7. Det vil si:

$$u_t(x_{2n+2}) = \kappa \cdot \Big(u(x_{2n+2},t) - u(x_{2n},t)\Big)$$

for en eller annen konstant κ. Men i tillegg til varmemembranen mellom x_{2n} og x_{2n+2} har biten i x_{2n} også kontakt med biten til venstre som den også vil utveksle varme med. Denne varmeflyten oppfyller også Newtons avkjølingslov, og til sammen, ved prinsippet for superposisjon, kan vi derfor beskrive den tidsderiverte av varmen i x_{2n} ved differensiallikningen

$$u_t(x_{2n},t) = \kappa \cdot \Big(u(x_{2n+2},t) - u(x_{2n},t)\Big) + \tag{11}$$

$$\kappa \cdot \Big(u(x_{2n-2},t) - u(x_{2n},t)\Big)\,. \tag{12}$$

Konklusjonen er at ved diskretisering gir varmelikningen (9) et system av koblede ordinære differensiallikninger av typen (7) som hver for seg beskriver varmeutviklingen i hver diskrete bit av varmelederen.

3.4. **Initialverdiproblemer.** Det vanlige oppsettet når vi løser oppgaver ved hjelp av varmelikningen (og mer generelt partielle differensiallikninger) er at vi har gitt en utgangstilstand, også kjent som en *initialbetingelse*, dvs. en kjent funksjon $u(x,t_0) = u(x)$, og så ønsker vi å finne et uttrykk for $u(x,t)$ for alle t. Når varmelikningen blir brukt til å modellere fysiske systemer for varmetransport, er det vanlig å la $t > 0$, og som oftest er da initialbetingelsen gitt for $t_0 = 0$.

Med andre ord er som oftest spørsmålet: Dersom vi kjenner temperaturen i staven for hvert punkt ved tidspunktet $t = 0$, og vi vet at temperaturfunksjonen oppfyller varmelikningen, kan vi da finne temperaturen i et hvert punkt i staven til ethvert tidspunkt? Vi skal se på en familie med viktige initialbetingelser der dette spørsmålet har et enkelt svar.

4. Noen viktige spesialtilfeller

Vi skal se på noen spesielle initialbetingelser og se på løsninger av varmelikningen som disse gir oppgav til.

La $f(x)$ være en harmonisk bølge

$$f(x) = \sin(\omega x + \rho)$$

der de reelle parameterene ω og ρ angir frekvens og faseforskyvning. Vi så at i tilfellet med Newtons avkjølingslov, fikk vi løsninger som nærmet seg mot likevektstilstanden omvendt eksponensielt (8). Motivert av dette lar vi

$$u(x,t) = e^{-ct} \cdot f(x) = e^{-ct} \cdot \sin(\omega x + \rho)\,,$$

der c er en konstant som angir hvor fort varmediffusjonen skjer. Med andre ord: vi bygger oss en funksjon som tar utgangspunkt i initialbetingelsen $f(x)$ og som avtar eksponensielt mot null i hvert punkt x. Vi påstår at $u(x,t)$ er en løsning av initialverdiproblemet

$$u_t = u_{xx} \tag{13}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{14}$$

Vi ønsker å sjekke at $u(x,t)$ løser tilfredsstiller varmelikningen (13), og regner derfor ut de partielt deriverte

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-ct} \cdot \sin(\omega x + \rho)\Big) \\ &= -c \cdot e^{-ct} \cdot \sin(\omega x + \rho) \\ &= -c \cdot u(x,t)\,, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \kappa \cdot u_{xx}(x,t) &= \kappa \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(e^{-ct} \cdot \sin(\omega x + \rho)\Big) \\ &= \kappa \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\omega e^{-ct} \cdot \cos(\omega x + \rho)\Big) \\ &= \kappa \cdot (-\omega^2) \cdot e^{-ct} \cdot \sin(\omega x + \rho) \\ &= \kappa \cdot (-\omega^2) \cdot u(x,t) \end{aligned}$$

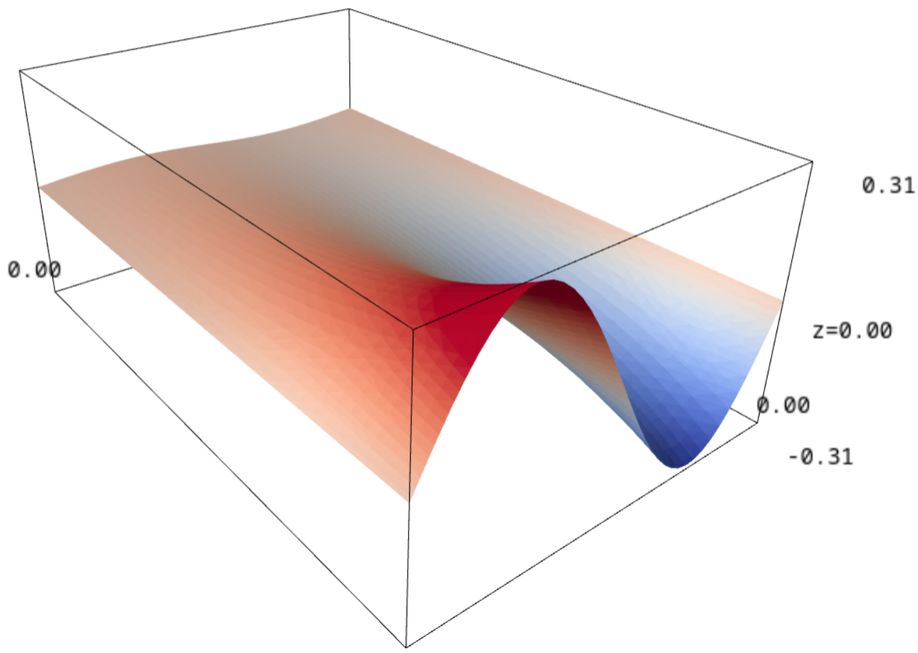
Vi ser at $u_t = \kappa \cdot u_{xx}$ når konstanten

$$c = \kappa \cdot \omega^2\,.$$

Vi har med andre ord funnet ut at funksjonene

$$u(x,t) = e^{-\kappa\omega^2 t} \cdot \sin(\omega x + \rho) \tag{15}$$

er løsninger av varmelikningen for alle konstanter ω, ρ.



FIGUR 1. Varmediffusjon der initialbetingelsen er en enkel harmonisk svingning.

5. LINEARITET

Anta at $f(x,t)$ og $g(x,t)$ begge er løsninger av varmelikningen

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)\,. \tag{16}$$

Da vil enhver lineærkombinasjon

$$u(x,t) = a \cdot f(x,t) + b \cdot g(x,t)$$

også være en løsning av den samme differensiallikningen. Generelt vil enhver lineær kombinasjon

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot u_n(x,t)$$

være en løsning av (16) dersom hver enkelt funksjon $u_n(x,t)$ er en løsning.

Spesielt vil lineærkombinasjoner av løsningene (15) også være løsninger.

Eksempel 4 Finn en løsning av initialverdiproblemet

$$u_t(x,t) = 2 \cdot u_{xx}(x,t)$$
$$u(x,0) = \sin(2\pi x) + \sin(3\pi + pi/2)$$

((...))

REFERANSER

[1] Werner E. Kohler and Lee W. Johnson, *Elementary Differential Equations with Boundary Value problems*, 2nd ed., Pearson, 2014.

INSTITUTT FOR INGENIØRVITENSKAP, UNIVERSITETET I AGDER
Email address: sverreal@uia.no
URL: https://home.uia.no/sverreal