MA-222. UKE 42: LØSNINGER AV VARMELIKNINGEN: RANDBETINGELSER OG LINEARITET

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Innledning

Vi fortsetter der vi slapp i forrige uke og skal se på løsninger av varmelikningen som oppfyller forskjellige randbetingelser.

Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

2. Løsninger av varmelikningen

Vi oppsummerer raskt hvilke funksjoner vi vet om som løser varmelikningen. Sist uke så vi at

$$u(x,t) = e^{-\kappa\omega^2 t} \cdot \sin(\omega x + \rho) \tag{1}$$

løser varmelikningen

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \tag{2}$$

for alle $\omega, \rho \in \mathbb{R}$. Dette vil være våre "byggesteiner" når vi løser generelle initialverdiproblemer.

3. Randbetingelser

Vi minner om de to typene randbetingelser (engelsk: "boundary conditions") vi opererer med i vår håndtering av varmelikningen.

1) "Konstant temperatur lik null": Dersom vi antar at staven vi modellerer er koblet i hver ende til et legeme med uendelig varmekapasitet og temperatur lik null, kan vi anta at temperaturen til staven i de to endepunktene også er null. Med formler uttrykker vi dette slik:

$$u(0,t) = 0 = u(l,t)\,. \tag{3}$$

Date: 16. november 2023.

2) "Isolerte endepunkter": Vi kan anta at vi har isolert stavens endepunkter. De praktiske følgene av dette er at vi hinder varme i å forlate eller entre stave. Den deriverte i x-retningen må derfor være null i endepunktene. Med formler uttrykker vi dette slik:

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)\,. \tag{4}$$

3.1. **Endepunkter med konstant temperatur lik 0.** Anta at vi holder endepunktene av staven ved konstant temperatur lik null. Løsningene (1) oppfyller ikke dette kravet for alle frekvenser og faseforskyvninger: Siden vi krever at $u(0,0) = 0 = u(l,0)$, må $\rho = 0$ og $\omega = n\pi/l$ der n er et helt tall. Funksjonen

$$u(x,t) = e^{-\kappa\cdot(n\pi/l)^2\cdot t}\sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) \tag{5}$$

løser derfor varmelikningen og oppfyller samtidig randbetingelsen. Videre vil lineære kombinasjoner også ha de samme egeneskapene: summen temperaturprofiler som er null grader i endepunktene vil også være null grader i endepunktene.

Generelt vil derfor summer

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot e^{-\kappa\cdot(n\pi/l)^2\cdot t}\sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) \tag{6}$$

også være løsninger, der vi står fritt til å velge koeffisientene a_n fritt.

3.2. **Isolerte endepunkter.** Anta så at vi isolerer endepunktene av staven. Igjen vil ikke alle løsningene (1) oppfyller dette kravet for alle frekvenser og faseforskyvninger: Siden vi krever at endepunktene er isolerte, vil $u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$. Dette medfører at $\rho = \pi/2$ og $\omega = n\pi/l$ der n er et helt tall. Nå kan derfor skrive om initialbetingelsen ved å bruke identiteten $\sin(u + \pi/2) = \cos(u)$, og der følger at funksjonen

$$u(x,t) = e^{-\kappa\cdot(n\pi/l)^2\cdot t}\cos\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) \tag{7}$$

løser derfor varmelikningen og oppfyller samtidig randbetingelsen. Videre vil lineære kombinasjoner også ha de samme egeneskapene: summen temperaturprofiler som har retningsderivert lik null i x-retningen, vil også ha retningesderivert lik null i x-retningen.

Generelt vil derfor summer

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot e^{-\kappa\cdot(n\pi/l)^2\cdot t}\cos\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) \tag{8}$$

også være løsninger, der vi står fritt til å velge koeffisientene b_n fritt.

3.3. **Initialbetingelser.** Nå som vi har funnet løsninger for varmelikningen under forskjellige randbetingelser, er det store spørsmålet: Gitt en funksjon $f(x)$. Kan vi da klare å finne koeffisienter a_n slik at (6) (eller (8)) oppfyller initialbetingelsen:

$$u(x,t) = f(x) \qquad x \in [0,l] \qquad ? \tag{9}$$

Vi skal kikke på noen enklere eksempler før vi tar fatt på det som leder inn til neste ukes emne: Fourier-rekker.

Eksempel 1 [1, Eksempel 9.3.1] Vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= 3u_{xx}(x,t) && 0 \leq x \leq 2 && 0 < t < \infty \\ u(x,0) &= -\sin(\pi x) + 3\sin(3\pi x) && 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

med randbetingelse

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \qquad\qquad 0 \leq t \leq \infty$$

((løsning))

Eksempel 2 [1, Eksempel 9.3.2] Vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad 0 \leq x \leq 4, \qquad 0 \leq t < \infty \tag{10}$$

$$u(x,0) = 5 - \cos(\pi x) - 3\sin^2(2\pi x) \qquad 0 \leq x \leq 4. \tag{11}$$

med randbetingelse

$$u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq \infty \tag{12}$$

(13)

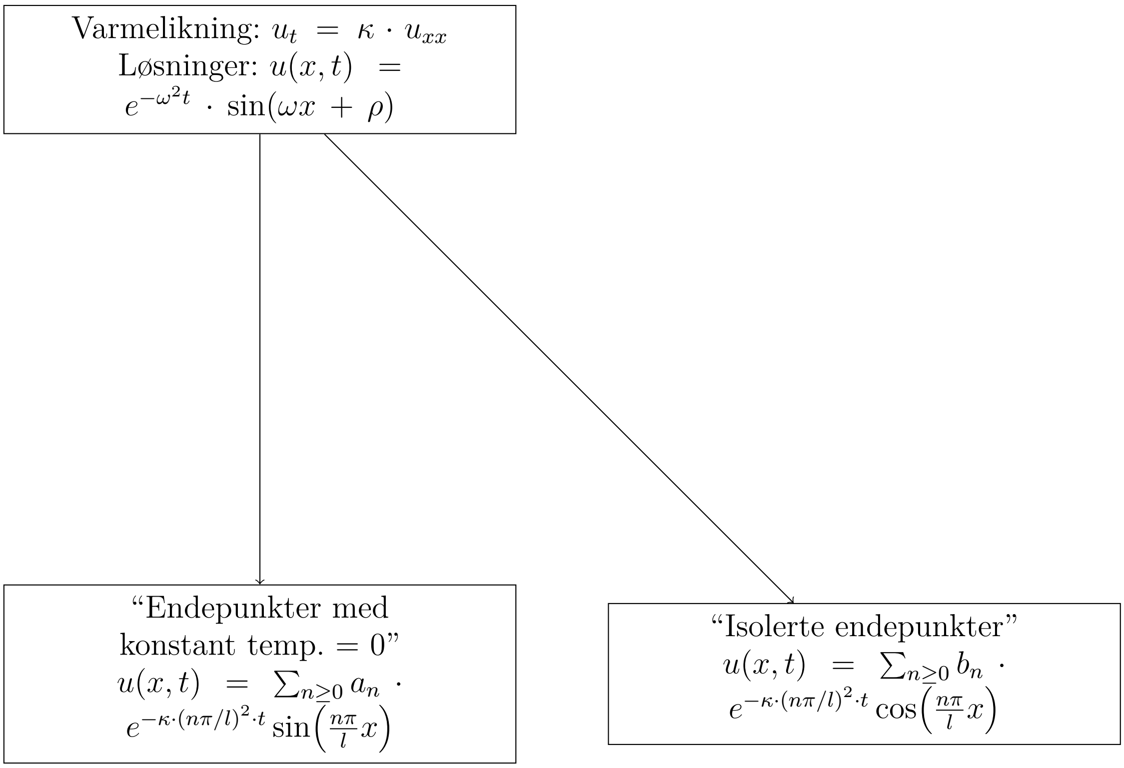
I denne oppgaven må vi skrive om initialbetingelsen ved å bruke at

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)\,.$$

Dermed blir (11)

$$u(x,0) = 5 - \cos(\pi x) - \frac{3}{2}(1 - \cos(4\pi x)) = \frac{7}{2} - \cos(\pi x) - \frac{3}{2}\cos(4\pi x)\,.$$

((løsning))



3.4. **Introduksjon til sinusrekkeløsninger.** I eksemplene over var initialbetingelsene enkle i den forstand at de bestod av endelige summer av sinus-funksjoner. Det gjorde at vi lett kunne identifisere hvilke koeffisienter a_n i den generelle løsningen (6) som trengte å være $\neq 0$, og hva de måtte være.

Problemet vi skal begynne på nå handler om hva som skjer når initialbetingelsen er gitt med en generell funksjon $f(x)$ som ikke trenger å være av denne typen. Altså, vi antar at $f(x)$ er gitt og innfører initialbetingelsen

$$u(x,0) = f(x) \tag{14}$$

(Vi minner om at vi fremdeles ser på randbetingelsen der endepunktene har konstant temperatur lik 0.)

Anta at vi har funnet et endelig antall koeffisienter a_n for $n = 1, 2, \dots N$ slik at

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\kappa c_n^2 t} \cdot \sin(c_n x) \qquad (c_n := n\pi/l) \tag{15}$$

gir en god tilnærming til initialbetingelsen, dvs. at

$$u(x,0) \approx f(x)\,.$$

Vi spør oss selv nå: Hva a_n ? For å svare på dette benytter vi en elegant teknikk som involverer integrasjon.

Lemma 3.1.

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) = \sin(\alpha)\sin(\beta)\,.$$

Bevis. Formelen for kosinus til en sum av vinkler sier at

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

så ved direkte utregning får vi:

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) \tag{16}$$

$$- \left(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\right) \tag{17}$$

$$= 2\sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{18}$$

Formelen i lemmaet følger etter å ha delt denne likningen på 2. □

Lemma 3.2. *La n og k være heltall. Da er*

$$\frac{2}{l}\int_0^l \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big)\cdot\sin\Big(\frac{k\pi}{l}x\Big)\;dx = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}.$$

Bevis. Lemma 3.1 medfører at

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{l}x\right) - \cos\left(\frac{(n+k)\pi}{l}x\right)\right]$$

som gjør oss i stand til å utføre integrasjonen og sjekke at integralet er lik 0 når $n \neq k$. ((+Detaljer))

Når $n = k$ vil integranden ha periode lik l, så

$$\begin{aligned}\int_0^l \sin^2(n\pi x/l)\;dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2l} \sin^2(n\pi x/l)\;dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2l} \sin^2(n\pi x/l) + \cos^2(n\pi x/l)\;dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2l} 1\;dx = \frac{2l}{4} = \frac{l}{2}\end{aligned}$$

$\square$

Ta nå tilnærmingen (15), og utfør integrasjonen:

$$\begin{aligned}\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin(\frac{k\pi}{l}x)\ dx &\approx \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\cdot\sin(\frac{k\pi}{l}x)\ dx\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{l}\int_0^l a_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot\sin(\frac{k\pi}{l}x)\ dx = a_k\,.\end{aligned}$$

Vi har med andre ord funnet en måte å finne koeffisientene a_k ved hjelp av integrasjon! Vi oppsummerer:

Teorem 3.3. *La $f(x)$ være en funksjon, og anta at*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\kappa c_n^2 t}\cdot\sin(c_n x) \qquad (c_n := n\pi/l)$$

er en løsning av varmelikningen med randbetingelser $u(0,t) = 0 = u(l,t)$ som tilnærmer $f(x)$ når $t = 0$,

$$u(x,0) \approx f(x)\,.$$

Da er

$$a_n \approx \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin(\frac{k\pi}{l}x)\ dx\,.$$

Eksempel 3 Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x\in[1/2,3/2]\\ 0 & ;\text{ellers}\,.\end{cases} \tag{19}$$

La $l = 2$. Finn en løsning av varmelikningen med randbetingelser $u(0,t) = 0 = u(2,t)$ slik at

$$u(x,0) \approx f(x)\,.$$

I følge Teorem 3.3 vil

$$a_k := \int_0^2 f(x)\cdot\sin(k\pi x/2)\ dx \tag{20}$$

gi koeffisientene til en løsning av varmelikningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\kappa c_n^2 t}\cdot\sin(c_n x) \qquad (c_n := n\pi/l) \tag{21}$$

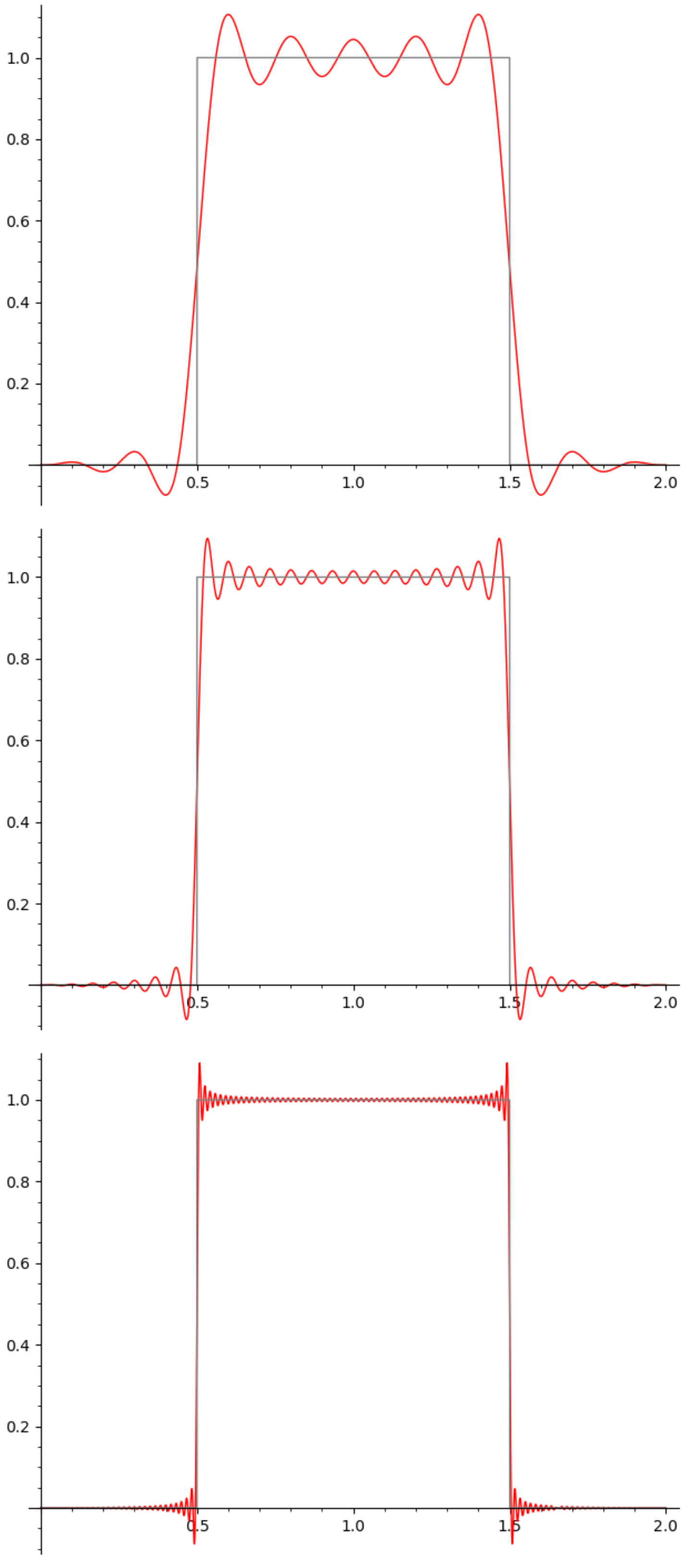
som er en tilnærming av initialverdiproblemet. Siden $f(x) = 1$ på intervallet $[0.5, 1.5]$ og 0 ellers, blir integralet (20) for $k \geq 1$ lik

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{3/2} \sin(k\pi x/2)\, dx &= \left[-\frac{2}{k\pi} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right) \right]_{x=1/2}^{x=3/2} \\
&= \frac{2}{k\pi}\left(\cos(k\frac{\pi}{4}) - \cos(k\frac{3\pi}{4} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{k\pi} \cdot \begin{cases} 0 & k = 8r \\ 1 & k = 8r+1 \\ 0 & k = 8r+2 \\ -1 & k = 8r+3 \\ 0 & k = 8r+4 \\ -1 & k = 8r+5 \\ 0 & k = 8r+6 \\ 1 & k = 8r+7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Figfurene på neste side viser forskjellige løsninger der antall ledd, N varierer. Legg merke til følgende:

- Funksjonene (som er tegnet med rødt i figurene) er alle sammen løsninger av varmelikningen $u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t)$.
- Alle oppfyller randbetingelsen $u(0, t) = 0 = u(l, t)$
- Løsningene tilnærmer initialbetingelsen (tegnet i sort), og tilnærming ser ut til å forbedre seg når vi øker antall ledd N.

I neste uke skal la $N \to \infty$ og se på de uendelige rekkene som da oppstår.



FIGUR 1. Tre forskjellige løsninger av varmelikningen for $N = 20, 60, 240$.

4. Ikke-homogene randbetingelser

Vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad 0 \le x \le l \qquad 0 \le t < \infty \tag{22}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le l \tag{23}$$

med randbetingelse

$$u(0,t) = T_0 \qquad u(l,t) = T_l \qquad 0 \le t \le \infty \tag{24}$$

Merk at i dette tilfellet er randbetingelsen at endepunktene har konstant temperatur, men denne temperaturen er ikke null. Vi sier at problemet ikke har *homogene randbetingelser.*

At randbetingelsene ikke er homogene medfører at vi ikke uten videre kan ta lineære kombinasjoner av løsninger vi finner og forvente å få nye løsninger. Vi kan heller ikke bruke løsningene vi har funnet til nå, siden de vil gi oss løsninger der endepunktene av staven har konstant temperatur lik null.

Det første skrittet i løsningen på problemet er å lage et nytt initialverdiproblem fra det opprinnelige, der randbetingelsene er homogene. La

$$v(x) = T_0 + x \cdot \frac{T_l - T_0}{l}$$

være funksjonen som lineært interpolerer mellom de to angitte endepunktstemperaturene T_0 og T_l. Med andre ord er grafen til $v(x)$ en rett linje og vi har at $v(0) = T_0$ og $v(l) = T_l$.

Anta at $u(x,t)$ er en løsning av det opprinnelige initialverdiproblemet (22)-(24). Da er $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ en løsning av følgende initialverdiproblem:

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) \qquad 0 \le x \le l \qquad 0 \le t < \infty \tag{25}$$

$$w(x,0) = f(x) - v(x) \qquad 0 \le x \le l \tag{26}$$

med randbetingelse

$$w(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad 0 \le t \le \infty \tag{27}$$

Og omvendt, hvis $w(x,t)$ oppfyller (25)-(27), så oppfyller funksjonen $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$ (22)-(24).

Vi kan med andre ord flytte en løsning av det opprinnelige problemet med ikkehomogene randbetingelser til en løsning av det modifiserte problemet som har homogene randbetingelser, og omvendt, ved å trekke fra eller legge til funksjonen $v(x)$. Det betyr at løsningsmengdene står i et 1–1-forhold til hverandre og spesielt at en løsning av det opprinnelige problemet alltid kan skrives som

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)$$

der $w(x,t)$ er en løsning av problemet med homogenes randbetingelser.

Eksempel 4 Inhomogene randbetingelser Vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= 3u_{xx}(x,t) && 0 \le x \le 2 && 0 < t < \infty \\ u(x,0) &= 1 - x - \sin(2\pi x) + 2\sin(5\pi x) && 0 \le x \le 2. \end{aligned}$$

med randbetingelse

$$u(0,t) = 1 \;\text{ og }\; u(2,t) = -1 \qquad 0 \le t \le \infty$$

Vi ser at dette er et initialverdiproblem med randbetingelser som tilsvarer endepunkter med forskjellig, men konstant, temperatur. Vi danner derfor funksjonen som lineært interpolerer mellom $T_0 = 1$ og $T_2 = -1$:

$$v(x) = 1 + x \cdot \frac{-1-1}{2} = 1 - x\,,$$

og bruker denne til å modifisere det opprinnelige initialverdiproblemet til et med homogene randbetingelser:

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= 3w_{xx}(x,t) & 0 \le x \le 2 \qquad & 0 < t < \infty \\ w(x,0) &= u(x,0) - v(x) && \\ &= -\sin(2\pi x) + 2\sin(5\pi x) & 0 \le x \le 2. & \\ w(0,t) &= u(2,t) = 0 & 0 \le t \le \infty & \end{aligned} \tag{28}$$

Den generelle løsningen er gitt ved

$$w(x,t) = \sum_{n\ge 0} a_n \cdot e^{-3(n\pi/2)^2\cdot t} \sin(\frac{n\pi}{2}x)$$

som når $t = 0$ ser ut som

$$w(x,0) = \sum_{n\ge 0} a_n \cdot \sin(\frac{n\pi}{2}x)\,.$$

For å finne koeffisientene a_n, sammenligner vi med randbetingelsen (28) som sier at det er kun de leddene i summen over med frekvens 1 og 2/5 som har koeffisienter forskjellig fra null. Disse frekvensene tilsvarer leddene med indeks $n = 4$ og $n = 10$, så $a_4 = -1$ og $a_{10} = 2$ og den generelle løsningen spesialiserer til

$$\begin{aligned} w(x,t) &= a_4 \cdot e^{-3(2\pi)^2\cdot t} \sin(2\pi x) + a_{10} \cdot e^{-3(5\pi)^2\cdot t} \sin(5\pi x) \\ &= -1 \cdot e^{-12\pi^2\cdot t} \sin(2\pi x) + 2 \cdot e^{-75\pi^2\cdot t} \sin(5\pi x)\,. \end{aligned}$$

Til slutt bruker vi denne løsingen til å finne løsningen av det opprinnelige initialverdiproblemet med inhomogene randbetingelser:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x,t) + v(x) \\ &= w(x,t) + 1 - x \\ &= -1 \cdot e^{-12\pi^2\cdot t} \sin(2\pi x) + 2 \cdot e^{-75\pi^2\cdot t} \sin(5\pi x) + 1 - x \end{aligned}$$

Referanser

[1] Werner E. Kohler and Lee W. Johnson, *Elementary Differential Equations with Boundary Value problems*, 2nd ed., Pearson, 2014.

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: `sverreal@uia.no`
URL: `https://home.uia.no/sverreal`