MA-222. UKE 43: FOURIER-REKKER

SVERRE LUNØE–NIELSEN

INNHOLD

1. INNLEDNING

Vi ser på [1][kapittel 9.5] og på hvordan enhver (stort sett) kontinuerlig og periodisk funksjon kan skrives som en sum av harmoniske bølger.

Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

2. FOURIERREKKER

Definisjon 2.1. *La $w > 0$ være et reelt tall og $f(x)$ en reell funksjon. Dersom $f(x) = f(x + kw)$ for alle heltall $k \in \mathbb{Z}$, sier vi at $f(x)$ er w-periodisk, eller at $f(x)$ er periodisk med periode w.*

Definisjon 2.2. *La $l > 0$, og la $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en $2l$-periodisk funksjon. Fourier-koeffisientene til $f(x)$ er definert som*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx$$
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx$$

for $n \geq 0$.

Med de samme utregningene vi gjorde på slutten av forrige ukes forelesning, får vi at dersom $f(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right)$, så er Fourier-koeffisientene til $b_n = 1$ når $m = n$, og 0 ellers. Videre er

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx = 0$$

for alle $m, n \geq 1$ fordi integralet fra $-l$ til l av en odde funksjon er lik 0, og produktet av en odde og en jevn funksjon er en odde funksjon.

Date: 16. november 2023.

Hvis vi mer generelt lar $f(x)$ være en sum av funksjoner

$$\begin{aligned}(1)\qquad f(x) &= \cos\left(\frac{m_1\pi}{l}x\right)+\cos\left(\frac{m_2\pi}{l}x\right)+\cos\left(\frac{m_3\pi}{l}x\right)+\ldots+\cos\left(\frac{m_k\pi}{l}x\right)\\ &+\sin\left(\frac{n_1\pi}{l}x\right)+\sin\left(\frac{n_2\pi}{l}x\right)+\sin\left(\frac{n_3\pi}{l}x\right)+\ldots+\sin\left(\frac{n_q\pi}{l}x\right),\end{aligned}$$

så vil Fourier-koeffisientene til $f(x)$ være

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{hvis } m = m_i \text{ for en } i = 1,2,\ldots,k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = n_j \text{ for en } j = 1,2,\ldots,q \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi skal tenke på dette som at Fourier-koeffisientene identifiserer hvilke frekvenser som er tilstede i $f(x)$, og hvilke som ikke er det. I dette tilfellet er det også nok å vite Fourier-koeffisientene for å vite nøyaktig hva $f(x)$ er som funksjon.

Definisjon 2.3. *La $l > 0$ og la $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en $2l$-periodisk funksjon. Dersom a_n og b_n er Fourier-koeffisientene til $f(x)$, kalles rekken*

$$(2)\qquad F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Fourier-rekken til $f(x)$. Fourier-rekken til $f(x)$ er selv en funksjon i x.

Bermerkning 1 Vi tenker på Fourier-rekken til $f(x)$ som en ny funksjon som vi har laget ved å først plukke ut hvilke frekvenser (gitt ved Fourier-koeffisientene) av cos og sin vi fant i $f(x)$ og deretter laget oss en sum av harmoniske bølger $F(x)$ med akkurat disse frekvensene.

Det konstante bidraget i Fourier-rekken (2) er spesielt. Ved definisjonen av a_0 er

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos(\frac{0\pi}{l}x)\;dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\;dx\,,$$

som gjør at vi kan tenke på a_0 som at det representerer "frekvens 0" eller "uendelig periode" i $f(x)$. Videre er integralet over lik gjennomsnittsverdien av $f(x)$ på intervallet $[-l, l]$.

Merk at når vi starter med en $f(x)$ som i (1), så gjenskaper Fourier-rekken $F(x)$ vår funksjon perfekt, i den forstand at vi har $F(x) = f(x)$. Men hva med en mer generell funksjon $f(x)$? Det viser seg at vi har flaks, i hvertfall når vi antar at $f(x)$ er periodisk.

Teorem 2.4. *La $l > 0$ og la $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en $2l$-periodisk kontinuerlig funksjon. Da konvergerer Fourier-rekken $F(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og $F(x) = f(x)$.*

Det er ofte litt upraktisk å måtte begrense seg til kontinuerlige funksjoner. Vi har derfor lyst til å utvide familien av tillatte funksjoner litt. Vi kaller $f(x)$ *stykkevis kontinuerlig* dersom $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar for alle $x \in [-l, l]$, med unntak av et endelig antall punkter i intervallet.

Teorem 2.5. [1, Teorem 9.1] *La $l > 0$ og la $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en $2l$-periodisk, stykkevis kontinuerlig funksjon. Fourierrekken $F(x)$ konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$. Dersom $f(x)$ er* *kontinuerlig i punktet x, er grenseverdien $F(x) = f(x)$. Dersom $f(x)$ ikke er kontinuerlig i x, er*

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{a\to x^-} f(a) + \lim_{a\to x^+} f(a)\right).$$

Bevisene for Teorem 2.4 og 2.5 er ikke pensum i MA-222.

3. Rekkeløsning av varmelikningen med initialbetingelser

Vi kan bruke Fourier-rekker til å finne løsningen på initialverdiproblemer som oppstår i forbindelse med varmelikningen. Til det formålet har vo to følgende triks som knytter en gitt varmeprofil $f(x)$ til en periodisk funksjon som kan studeres ved hjelp av Fourier-rekker.

3.1. **Triks: Utvidelse til en odde funksjon.**

La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon definert på intervallet $[0, l]$. Definer

$$f_{odd}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in (0, l) \\ 0 & ; x = -l, x = 0, \text{ eller } x = l \\ -f(-x) & ; x \in (-l, 0)\,. \end{cases}$$

Vi har laget en ny odde funksjon på hele intervallet $[-l, l]$, som er lik $f(x)$ på intervallet $(0, l)$. Merk at vi trenger at $f(0) = 0$ for at $f_{odd}(x)$ skal være en odde funksjon: $f_{odd}(-0) = -f_{odd}(0)$ er kun sant dersom $f_{odd}(0) = 0$. Det samme gjelder endepunktene $x = -l$ og $x = l$. Det betyr at vår odde funksjon ikke er lik $f(x)$ når $x = 0$, $x = -l$ eller $x = l$ med mindre $f(x) = 0$ allerede i disse punktene. Vi har derfor muligens innført maksimalt tre diskontuiteter, men det har vi lov til i følge teorem 2.5.

Som et siste steg utvider vi f_{odd} til en periodisk stykkevis kontinuerlig funksjon på hele tallinjen $\mathbb{R}$ ved formelen $f_{odd}(x + k \cdot 2l) = f_{odd}(x)$ for alle heltall k.

((tegning))

Se nå på Fourier-rekken til denne periodiske odde utvidelsen. Koeffisientene

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_{odd}(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\, dx = 0$$

er lik null siden integranden er en odde funksjon og vi integrerer fra $x = -l$ til $x = l$. Merk at dette inkluderer a_0. Koeffisientene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_{odd}(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\, dx \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f_{odd}(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\, dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\, dx \end{aligned}$$

siden integranden er en jevn funksjon (produktet av to odde).

Konklusjonen er at funksjonen f_{odd} kan skrives som sinus-Fourier-rekken

$$f_{odd}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{3}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Siden $f(x) = f_{odd}(x)$ når $x \in [0, l]$, så har vi funnet en konvergent sinusrekke som er en funksjon av x og som konvergerer mot $f(x)$, for alle $x \in [0, l]$ der $f_{odd}(x)$ er kontinuerlig.

3.2. **Triks: Utvidelse til en jevn funksjon.** La $f(x)$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon definert på intervallet $[0, l]$. Definer

$$f_{jevn}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [0, l] \\ f(-x) & ; x \in [-l, 0] \, . \end{cases}$$

Vi har utvidet f til en jevn funksjon på hele intervallet $[-l, l]$. Som et siste steg utvider vi f_{jevn} til en periodisk funksjon på hele tallinjen $\mathbb{R}$ ved formelen $f_{jevn}(x + k \cdot 2l) = f_{jevn}(x)$ for alle heltall k og $x \in [-l, l]$.

((tegning))

Se nå på Fourier-rekken til den periodiske jevne utvidelsen. Koeffisientene

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f_{jevn}(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx = 0$$

er lik null siden integranden er en odde funksjon og vi integrerer fra $x = -l$ til $x = l$. Koeffisientene for kosinus-delen blir:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f_{jevn}(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx \\ &= \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f_{jevn}(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \, dx \, . \end{aligned}$$

De siste to likhetene fløger siden integranden er en jevn funksjon (produktet av to jevne).

Konklusjonen er at funksjonen f_{jevn} kan skrives som kosinus-Fourier-rekken

$$f_{jevn}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \tag{4}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Siden $f(x) = f_{jevn}(x)$ når $x \in [0, l]$, så har vi funnet en konvergent kosinus-rekke som er en funksjon av x og som konvergerer mot $f(x)$, når $x \in [0, l]$ for alle $x \in [0, l]$ der $f_{jevn}(x)$ er kontinuerlig.

Bermerkning 2 Med de to triksene over kan vi velge å bruke en sinus- eller en kosinus-rekke til å uttrykke $f(x)$ på intervallet $[0, l]$.

4. Eksempel

Eksempel 3 Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1/2, 3/2] \\ 0 & \text{ellers} \, . \end{cases} \tag{5}$$

La $l = 2$. Finn en løsning av varmelikningen

$$u_t = u_{xx}$$

med randbetingelser

$$u(0, t) = 0 = u(2, t)$$

og initialbetingelser

$$u(x, 0) = f(x) \, .$$

((Gi en fysisk tolkning av hva denne likningen beskriver.)) ((tegning))

Vi vet at

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \cdot e^{-(n\pi/2)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \tag{6}$$

løser varmelikningen og har de riktige randbetingelsene.

Siste steg er å finne koeffisientene b_n slik at initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$ er oppfylt. Vi ønsker med andre ord at sinus-rekken

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

skal være lik $f(x)$ når $x \in [0,l]$. Til dette kan vi bruke trikset over som sier at

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cdot \sin(n\pi x/2)\ dx\,. \tag{7}$$

Siden $f(x) = 1$ på intervallet $[0.5, 1.5]$ og 0 ellers, blir integralet (7) for $k \geq 1$ lik

$$\begin{aligned}
b_n = \int_{1/2}^{3/2} \sin(n\pi x/2)\ dx &= \left[-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_{x=1/2}^{x=3/2} \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\frac{\pi}{4}) - \cos(n\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{n\pi} \cdot \begin{cases} 0 & n = 8r \\ 1 & n = 8r+1 \\ 0 & n = 8r+2 \\ -1 & n = 8r+3 \\ 0 & n = 8r+4 \\ -1 & n = 8r+5 \\ 0 & n = 8r+6 \\ 1 & n = 8r+7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Nå har vi essensielt funnet vår løsning siden vi kjenner alle koeffisientene b_n som gjør at den generelle løsningen (6) oppfyller initialbetingelsen.

Avslutningsvis i dette eksemplet skal vi skrive løsningen på en litt mer kompakt form. For å gjøre det observerer vi at alle Fourier-koeffisientene b_n med jevn indeks er lik 0, og at

$$b_{2k+1} = \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}\cdot\sigma(k)$$

der

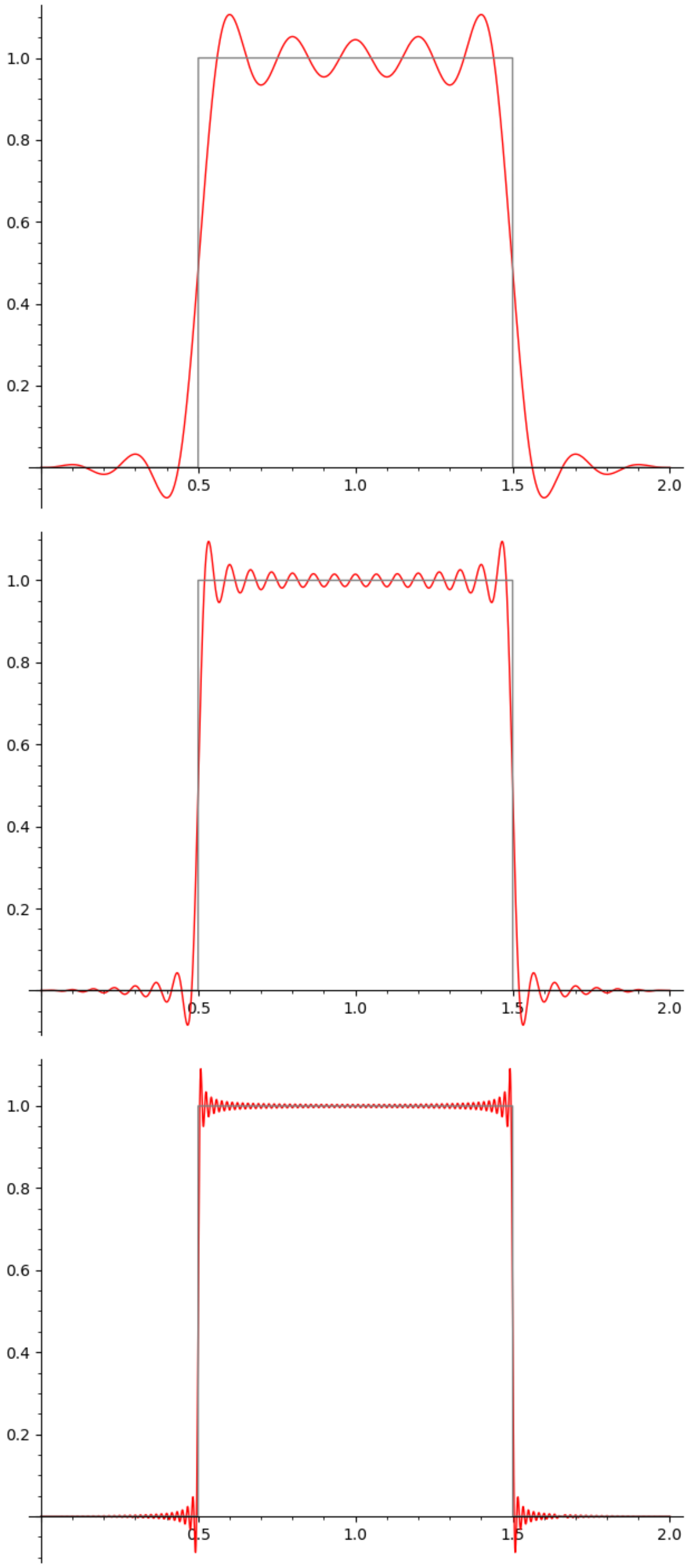
n	0	1	2	3	...
$\sigma(n)$	1	-1	-1	1	...

og som så gjentar seg 4-periodisk, med andre ord $\sigma(k+4) = \sigma(k)$.

Ved å kobinere dette med (6) kan vi skrive vår spesielle løsning slik:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{(2k+1)\pi}\cdot\sigma(k)\cdot e^{-((2k+1)\pi/2)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)$$

Figurene på neste side viser forskjellige endelige delsummer av Fourier-rekken til $u(x,r)$ når $t = 0$. Som figurene antyder, konvergerer disse delsummene mot $f(x)$.



FIGUR 1. Tre delsummer av Fourier-rekken som uttrykker initialbetingelsen gitt ved $f(x)$ i eksempel 3. $N = 20, 60, 240$.

Referanser

[1] Werner E. Kohler and Lee W. Johnson, *Elementary Differential Equations with Boundary Value problems*, 2nd ed., Pearson, 2014.

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: sverreal@uia.no
URL: https://home.uia.no/sverreal