MA-222. UKE 45: BØLGELIKNINGEN

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Innledning

Bølgelikningen er det andre eksemplet på en partiell differensiallikning vi ser på. Den likner på varmelikningen, men i stedet for å la konkavitetene i x-retningen bestemme vekstraten i t-retningen, bestemmer de akselerasjonen i t-retningen.

Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

2. Bølgelikningen

Bølgelikningen er den partielle differensiallikningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \cdot u_{xx}(x,t) \tag{1}$$

der c er en konstnant.

Som (vi skal se) beskriver f.eks. bevegelsene til en streng i bevegelse. I dette tilfellet representerer $u(x,t)$ utslaget til strengen i posisjon x ved tiden t fra hviletilstanden. ((bilde)) Vi holder strengens endepunkter i ro, og representerer dette ved randbetingelsen

$$u(0,t) = 0 = u(l,t) \tag{2}$$

I tillegg beskrives utgangstilstanden til strengen ved initialbetingelsene

$$u(x,0) = f(x) \qquad\qquad u_t(x,0) = g(x) \tag{3}$$

der $f(x)$ og $g(x)$ er funksjoner som beskriver utgangsposisjon og -hastighet for et hvert punkt på strengen i tiden $t = 0$.

3. Ordinære differensiallikninger: Harmoniske svingninger

La en punktmasse m være festet i den en ene enden av en fjær som i den andre enden er festet til et legeme som vi antar har uendelig treghet. Vi antar at ingen krefter virker på m bortsett fra de som oppstår når fjæren trykkes sammen eller strekkes. Hookes lov beskriver denne kraften på m ved å si at den er proporsjonal med hvor mye fjærlengden er endret i forhold til sin hvilelengde L_0.

Date: 16. november 2023.

La $y(t)$ være fjærens lengde som funksjon av tiden t. Det følger av Hookes lov og Newtons andre lov at $y(t)$ oppfyller differensiallikningen

$$y''(t) = \frac{k}{m} \cdot \big(L_0 - y(t)\big) \tag{4}$$

der k er en konstant som beskriver fjærens stivhet. Merk at når differensiallikningen over blir brukt som modell for det fysiske systemet vi har beskrevet, så gir det kun fysisk mening at $k > 0$: Dersom $L_0 - y(t) < 0$ på et tidspunkt t, så er fjærens lengde større enn hvilelengden. Det betyr at den er strukket ut og vil utøve en kraft på m i den retningen som kommer til å redusere lengden y. Med andre ord må $y''(t) < 0$. Så begge sider av (4) er negative, som medfører at k må være positiv siden massen $m > 0$.

Vi lærte i MA-178 at den generelle løsningen til differensiallikningen (4) er en harmonisk svingning

$$y(t) = r \cdot \cos(\omega t - \theta) + L_0 \tag{5}$$

der $\omega = \sqrt{k/m}$ og hvor vi står fritt til å velge amplituden r og faseforskyvningen θ. Eventuelt kan vi bruke identiteten $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ og skrive løsningen over som

$$y(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) + L_0 \tag{6}$$

der $a = r\cos(\theta)$ og $b = r\sin(\theta)$ er vilkårlige konstanter.

Dersom man ønsker å vite nøyaktig hvilken av disse løsningene som beskriver fjærens lengde som funksjon av tiden t, må vi vite systemets *initialbetingelser*, som i dette tilfellet er utgangsposisjon og -hastighet.

4. Hvorfor kaller vi det "bølgelikningen"?

((Diskretisering av likningen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ gir et system av koblede ordinære likninger av typen $u_{tt} = K \cdot (L_0 - u)$)) ((++detaljer))

5. Løsninger av bølgelikningen

Anta at initialbetingelsen $f(x) = \sin(\alpha t - \phi)$ er en harmonisk svingning. På grunn av randbetingelsene (2) må $\phi = 0$ og $\alpha = n\pi/l$ der n er et heltall.

Motivert av §3 lar vi

$$u(x,t) = \cos(\omega t - \theta) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l} x)\,. \tag{7}$$

Vi regner ut

$$u_{tt} = -\omega^2 \cdot u(x,t)$$
$$c^2 u_{xx} = c^2 \cdot -(\frac{n\pi}{l})^2 \cdot u(x,t)$$

som betyr at $u(x,t)$ er en løsning av (1), som også oppfyller randbetingelsene (2) når

$$\omega = \frac{nc\pi}{l}\,.$$

Den generelle løsningen av bølgelikningen basert på disse harmoniske løsningene er derfor

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} r_n \cdot \cos(\frac{nc\pi}{l} t - \theta_n) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l} x) \tag{8}$$

der r_n og θ_n er fritt valgte konstanter. Dette er en løsning siden bølgelikningen er lineær og randbetingelsene våre er homogene.

Nå ønsker vi, akkurat som i tilfellet med varmelikningen, å finne koeffisienter r_n og θ_n, for alle n, slik at løsningen også tilfredsstiller initialbetingelsene gitt ved (3).

Første steg er å regne ut den deriverte med hensyn på tiden

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} -\frac{nc\pi}{l} \cdot r_n \cdot \sin(\frac{nc\pi}{l}t - \theta_n) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x) \tag{9}$$

Initialbetingelsene gir oss

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n\geq 1} r_n \cdot \cos(\theta_n) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$
$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n\geq 1} \frac{nc\pi}{l} \cdot r_n \cdot \sin(\theta_n) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

Dersom vi lar $a_n = r_n \cos(\theta_n)$ og $b_n = r_n \sin(\theta_n)$, er med andre ord a_n Fourierkoeffisientene i sinusrekken til $f(x)$, og $\frac{nc\pi}{l} b_n$ koeffisientene til sinusrekken til $g(x)$.

Dermed er

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x)\ dx \tag{10}$$

$$b_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^l g(x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x)\ dx\,. \tag{11}$$

Nå går vi tilbake til løsningen (8). Ved å bruke identiteten

$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)\,,$$

kan vi skrive denne om til

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cdot \cos(\frac{nc\pi}{l}t) + b_n \cdot \sin(\frac{nc\pi}{l}t)\right] \cdot \sin(\frac{n\pi}{l}x) \tag{12}$$

der koeffisientene a_n og b_n er gitt ved (10)-(11).

Referanser

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: sverreal@uia.no
URL: https://home.uia.no/sverreal